SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

1. Introdução

Uma sequência de números reais é uma ‘lista ordenada

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

de números reais.

A definição precisa é a seguinte:

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Em geral escrevemos x_n em vez de $x(n)$, e também denotamos por $x := (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \dots)$, ou $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente por $x := (x_n)$ a sequência x.

Exemplos 1.2.
(1) *A sequência constante: $x := (2, 2, \dots, 2, \dots)$, ou seja, $x_n := 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
(2) *A sequência dos números naturais pares: $x := (2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$, ou seja, $x_n := 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
(3) *A sequência $x_n := 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, \dots)$.*
(4) *A sequência $x_n := (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots)$.*
(5) *A sequência $x_n := (-1)^n \cdot n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (-1, 4, -9, \dots)$.*
(6) *A sequência $x_n := (-1)^{n+1}/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (1, -1/2, 1/4, -1/8 \dots)$.*

Date: May 4, 2021.

(7) *A sequência definida* ***por recorrência:***

$$\begin{cases} x_1 := \sqrt{2}, \\ x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n} \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

(8) *A sequência de* Fibonacci, *definida por recorrência:*

$$\begin{cases} x_1 := 1, x_2 := 1; \\ x_{n+2} := x_n + x_{n+1} \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Algumas definições que serão úteis:

Definição 1.3. *Dizemos que a sequência (de números reais)* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é:*

(1) ***limitada superiormente*** *se existir* $b \in \mathbb{R}$*, tal que* $x_n \leq b$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
(2) ***limitada inferiormente*** *se existir* $a \in \mathbb{R}$*, tal que* $a \leq x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
(3) ***limitada****, se for limitada superiormente e inferiormente, ou seja, se existirem* $a, b \in \mathbb{R}$*, tais que* $a \leq x_n \leq b$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
(4) ***monótona crescente*** *ou* ***monótona não decrescente*** *se* $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Se* $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, diremos que a sequência é* ***monótona estritamente crescente****. Analogamente, definimos* ***monótona decrescente*** *e* ***monótona estritamente. decrescente***

Definição 1.4. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência e* $\mathbb{N}' := \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k\}$ *é um subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$*, dizemos que a restrição de* x *a* N' *é uma* ***subsequência*** *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que será denotada por* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *ou* $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_i}, \ldots)$*.*

Observação 1.5. *A rigor,* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *não é uma sequência, pois não tem domínio* $\mathbb{N}$*, mas vamos identificá-la com a sequência:* $y_i := (x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$*. Por exemplo, se* $n_i = 2i$*,* $i \in \mathbb{N}$*, e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é a* *sequência do exemplo (4) acima, então* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *será identificada com a sequência constante* $(1, 1, 1, \ldots,)$.

Exercício 1.6. *Determine se as sequências do exemplo 1.1 são limitadas superiormente, limitadas inferiormente, monótonas crescentes ou decrescentes.*