SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

1. Propriedades do limite de sequências

1.1. Propriedades básicas.

Proposição 1.1. *O limite de uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, se existir, é único.*

Dem:

$\square$

Proposição 1.2. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para um limite* a *se e somente se, toda sua subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para o mesmo limite* a*.*

Dem:

$\square$

Exemplo 1.3. *A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *do exemplo (4) diverge,pois a sequência dos índices pares* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 1 *e a sequência dos índices ímpares* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* -1*.*

Observação 1.4. *Um caso particular importante de subsequência é a* ***cauda*** $(x_n)_{n\geq n_0}$ *de uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Neste caso, a sequência convergirá se e somente se qualquer uma de suas caudas convergir. Como consequência, a propriedade de convergência (ou não) não se altera se alteramos um número finito de termos da sequência.*

Proposição 1.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Date: May 19, 2021.

Dem:

$\square$

Proposição 1.6. ***Propriedades algébricas*** *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, *então:*

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.
b) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.
c) $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b, \quad se\ b \neq 0$.

Dem:

$\square$

Exemplo 1.7. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n+3}$.

Observação 1.8. *Os resultados da proposição podem ser estendidos para um número finito de sequências, por indução.*

Proposição 1.9. *(Permanência de sinal) Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência convergente tal que* $x_n \geq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então*
$\lim_{n\to\infty}(x_n) \geq 0$.

$\square$

Corolário 1.10. *Sejam Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências convergentes. Então*

(1) *Se* $x_n \leq y_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) \leq \lim_{n\to\infty}(y_n)$.
(2) *Se* $x_n \leq b$ $(\geq a)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) \leq b$ $(\geq a)$.

Dem: $\square$

Teorema 1.11. *(Teorema do Confronto) Sejam Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências de números reais tais que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

.

Então, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para o mesmo limite L, então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é convergente e

$$\lim_{n\to\infty}(y_n) = L.$$

Dem: Dado $\epsilon > 0$, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon$ e $n \geq n_1 \Rightarrow |z_n - L| < \epsilon$.

Então, se $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, teremos: $y_n \leq z_n < L + \epsilon$ e $y_n \geq x_n > L - \epsilon$. Segue que $-\epsilon < y_n - L < \epsilon \Rightarrow |y_n - L| < \epsilon$ $\square$

Observação 1.12. *Em vista da observação 1.4, as hipóteses nos resultados acima não precisam ser verificados para todo $n \in \mathbb{N}$, basta verificá-las para $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Corolário 1.13. *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais.*

- *Se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*
- *Se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada então a sequência produto $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n := x_n \cdot y_n$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.*

Exemplos 1.14. (1) *Mostre que $\lim_{n\to\infty}(\frac{sen\, n}{n}) = 0$.*

(2) *Mostre que, se $0 \leq a < 1$ então $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.*

(3) *Suponha que n_n é uma sequência de números positivos e $x_{n+1} \leq ax_n$, com $0 \leq a < 1$. Mostre que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$.*

Proposição 1.15. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, então a sequência dos valores absolutos $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n|$.*

Dem:

$\square$

1.2. **Sequências monótonas.** Nos exemplos anteriores, mostramos a convergência de sequências, sabendo (ou conjecturando) previamente o valor do limite. No caso de sequências monótonas, proém é possível muktas vezes demonstrar a convergência sem conhecer previamente o limite.

Teorema 1.16. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente e limitada superiormente por M. Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n \leq M$.*

Analogamete, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona decrescente e limitada inferiormente por m. Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n \geq m$.

Dem: *Da hipótese, segue que o conjunto $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente por M. Portanto, existe $S \leq M$ o supremo de A. Mostraremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = S$.*

Dado $\epsilon > 0$, existe então x_{n_0} em A tal que $S - \epsilon < x_{n_0}$. Como $x_n \geq x_{n_0}$, para $n \geq n_0$, teremos $n \geq n_0 \Rightarrow S - \epsilon < x_n \leq S < S + \epsilon \Rightarrow |x_n - S| < \epsilon$. $\square$

Exemplos 1.17. (1) *Mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.*

(2) *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, para $n \geq 1$. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule seu limite.*

(3) *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida recursivamente por $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, para $n \geq 1$. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule seu limite.*