1. Limites infinitos

Em certos casos, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** porque seus termos "se aproximam" de $+\infty$ ou de $-\infty$. Mais precisamente, temos as seguintes definições:

Definição 1.1.

(1) *Dizemos que a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tende*** *para* $+\infty$ *(ou* ***diverge*** *para* $+\infty$*), se* $\forall M > 0, \exists N(\epsilon) : n \geq N(\epsilon) \Rightarrow x_n > M$.

(2) *Dizemos que a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tende*** *para* $-\infty$ *(ou* ***diverge*** *para* $-\infty$*), se* $\forall M > 0, \exists N(\epsilon) : n \geq N(\epsilon) \Rightarrow x_n < -M$.

No primeiro caso, escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e, no segundo $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (note entretanto que as sequência **divergem** em ambos os casos).

Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge propriamente, se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Exemplos 1.2.

(1) *A sequência* $x_n := n,\ n \in \mathbb{N}$ *diverge para* $+\infty$*, ou seja,* $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

(2) *A sequência* $x_n := -n^3,\ n \in \mathbb{N}$ *diverge para* $-\infty$*, ou seja,* $\lim_{n\to\infty} -n^3 = -\infty$.

(3) *A sequência* $x_n := a^3,\ n \in \mathbb{N}$ *diverge para* $+\infty$*, se* $a > 1$ *e é divergente mas não é propriamente divergente se* $a < -1$.

Nos exemplos (2) e 3, usamos implicitamente o seguinte argumento de comparação:

Date: May 24, 2021.

Proposição 1.3. *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências de números reais satisfazendo:*

$$x_n \leq y_n \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então temos:

a) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, então $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$.
b) Se $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

□

Observe-se que os resultados de comparação ainda valem se a hipótese é satisfeita apenas para $n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Frequentemente, a comparação é feita apenas "no limite", usando o seguinte resultado.

Proposição 1.4. *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências de números reais positivos, satisfazendo:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/y_n) = L$$

Então temos:

a) Se $L = 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, então $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$.
b) Se $L = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
c) Se $0 < L < +\infty$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

□

Exemplo 1.5. *Mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 2n + 1} = +\infty$.*

Observe-se que as notações $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ são usadas por conveniência, propriedades válidas para limites usuais (finitos), e em particular, propriedades algébricas, podem não valer para esses limites. Entretanto, ainda valem algumas dessas.

Proposição 1.6. *Propriedades algébricas para limites infinitos*

a) *Se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.*

b) *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} > c > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty$.

c) *Se* $x_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(1/x_n) = +\infty$.

d) *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada e* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *então* $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$.

e) *Sejam* x_n *e* y_n *sequências de termos estritamente positivos. Se* $x_n > c > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ *então* $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = +\infty$.

$\square$

Observação 1.7. *Resultados análogos valem se substituirmos* $+\infty$ *por* $-\infty$ *na proposição 1.6*

- *Outras propriedades aritméticas seguem facilmente da proposição 1.6. Por exemplo, segue do ítem b) que se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $\lim y_n > 0$ *então* $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty$.

Observação 1.8. *(Indeterminações). Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *nada se pode afirmar, em geral sobre* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. *Dizemos que* $+\infty + (-\infty)$ *é uma* ***indeterminação***. *Outros casos de indeterminação são:* $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ *e* $0/0$.

Exemplos 1.9.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$,

(2) $\lim_{n\to\infty}(n - n^2) = -\infty$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty$, *se* $a > 1$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.