O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

1. Representação binária

Vamos mostrar que todo número real no intervalo $I = [0,1]$, pode ser associado a uma sequência de $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots)$ de 0_s e 1_s, de tal forma que

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comecemos com $n = 1$. para isto, bisectamos o intervalo $[0,1]$, ou seja escrevemos $[0,1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$.

Então se $x \in [0, \frac{1}{2}[$ tomamos $a_1 = 0$ e, se $x \in]\frac{1}{2}, 1]$ tomamos $a_1 = 1$. Para $x = \frac{1}{2}$, podemos escolher $a_1 = 0$, ou $a_1 = 1$. Para evitar esta ambiguidade, vamos escolher $a_1 = 0$, neste caso.

Teremos então, em qualquer caso

$$\frac{a_1}{2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}$$

sendo $a_1 = 0$ ou $a_1 = 1$ conforme x esteja na primeiro ou segunda metade do intervalo $[0,1]$.

Date: May 7, 2021.

Agora, observemos que
$\frac{a_1}{2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x - \frac{a_1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2(x - \frac{a_1}{2}) \leq 1.$
Portanto, $y = 2(x - \frac{a_1}{2})$ pertence novamente ao intervalo $[0, 1]$ e, repetindo o argumento anterior teremos:
$\frac{a_2}{2} \leq y \leq \frac{a_2}{2} + \frac{1}{2}$ sendo $a_2 = 0$ ou $a_2 = 1$ e, portanto

$$\frac{a_2}{4} \leq x - \frac{a_1}{2} \leq \frac{a_2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{1}{4}$$

.

Procedendo dessa maneira, obteremos
(1) após n passos (a prova formal se faz por indução).
A aplicação

$$x \in [0, 1] \to (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$$

é injetiva (com a escolha feita quando x está no ponto médio de algum intervalo da forma $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$.

Reciprocamente , para cada sequência de $0s$ e $1s$ $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ é a representação binária de um único número real x (Por que?).

Usando esta representação podemos dar uma outra demonstração para a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1. *O conjunto das sequências binárias:*

$$\{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \ : a_i = 0 \ ou \ a_i = 1\}$$

é não enumerável.

Dem: Usamos o famoso **argumento diagonal de Cantor**

$\square$

Corolário 1.2. *O intervalo* $[0, 1]$ *é não enumerável.* $\mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Esboço da demonstração: Seja A o conjunto das representações binárias e B o o conjunto das representações binárias quse nulas, isto é: $B := \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e $B_n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, 0\cdots) \ : a_i = 0$ para $i > n\}$.

Como B_n é um conjunto finito segue que B é enumerável e, do Teorema 1.1, segue então que $A \setminus B$ é um conjunto não enumerável.

Sendo $x \mapsto$ representação binária de x, bijetora de $[0, 1]$ sobre $A \setminus B$ segue que o intervalo $[0, 1]$ é não enumerável. $\square$

2. Representação decimal

A representação decimal de um número real no intervalo $[0,1]$ é análoga à representação binária, exceto que a divisão é feita em 10 subintervalos iguais e os a_i podem ser $0,1,2,\cdots,10$.

Cada número real no intervalo $I=[0,1]$, pode então ser associado, a uma sequência d $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\cdots)$ de tal forma que

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\le x\le \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}. \tag{2}$$

A representação é única, exceto quando $x=m/10^n$, para $m,n\in\mathbb{N}$, quando podemos escolher uma de duas possíveis representações. Por exemplo, se $x=\frac{1}{2}$ então $x=0.49999\cdots=0.500000\cdots$.

Exercício 2.1. *Mostre que, se $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ é uma sequência de 0_s e 1_s, então existe um único $x\in[0,1]$, cuja representação binária é a sequência dada.*