O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Existem duas formas fundamentalmente diferentes de introduzir o conjunto (ou melhor o corpo ordenado completo) dos números reais. Podemos "construir" o conjunto a partir de outro admitido como conhecido ($\mathbb{Q}$), definir as operações e a noção de ordem e, a partir daí, provar as propriedades fundamentais. Não é o que faremos aqui. Em vez disso, listaremos essas propriedades básicas e suporemos a existência do conjunto (mais propriedades e relação de ordem), satisfazendo tais propriedades e prosseguiremos a partir daí.

1. Corpos e corpos ordenados

Dado um conjunto A, uma *operação* definida em A é uma função $\phi : A \times A \to A$. Tradicionalmente, se indica a imagem $\phi(a, b)$ de $(a, b) \in A \times A$ por $a * b, a + b, a \cdot b$, etc.

Definição 1.1. *Um **corpo** é um conjunto K munido de duas operações: a **adição**, denotada por $+$ e a **multiplicação** denotada por $\cdot$, satisfazendo a seguinte lista de propriedades.*

1. **(A1)** $(a + b) + c = a + (b + c)$, *para quaisquer* $a, b, \in K$ *(propriedade associativa da adição).*
2. **(A2)** $a + b = b + a$, *para quaisquer* $a, b \in K$ *(propriedade comutativa da adição).*
3. **(A3)** *Existe um elemento, denotado por* $0, \in K$ *tal que* $a+0 = a$, *para qualquer* $a \in K$ *(existência do elemento neutro da adição).*
4. **(A4)** *Para todo* $a \in K$ *existe um elemento, denotado por* $-a \in K$, *tal que* $a + (-a) = 0$. *(elemento oposto aditivo).*

Date: April 28, 2021.

(5) **(M1)** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, *para quaisquer* $a, b, \in K$ *(propriedade associativa da multiplicação).*
(6) **(M2)** $a \cdot b = b \cdot a$, *para quaisquer* $a, b \in K$ *(propriedade comutativa da multiplicação).*
(7) **(M3)** *Existe um elemento, denotado por* $1, \in K$ *tal que* $a \cdot 1 = a$, *para qualquer* $a \in K$ *(existência do elemento neutro para a multiplicação).*
(8) **(M4)** *Para todo* $a \in k$ *existe um elemento, denotado por* $a^{-1} \in K$, *tal que* $a \cdot a^{-1} = 1$. *(inverso multiplicativo).*
(9) **(D)** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, *para quaisquer* $a, b, c \in K$ *(propriedade distributiva).*

Dessas propriedades, outras propriedades e manipulações algébricas básicas familiares decorrem. Apenas como ilustração vamos provar algumas.

Teorema 1.2. (1) *Se* $z, b \in K$ *e* $z + b = b$ *então* $z = 0$.
(2) *Se* $z, b \in K$, $b \neq 0$ *e* $z \cdot b = b$ *então* $z = 1$.
(3) *Se* $b \in K$, *então* $b \cdot 0 = 0$.
(4) *Se* $a, b \in K$, $a \neq 0$ *e* $a \cdot b = 1$, *então* $b = (a)^{-1}$.
(5) *Se* $a, b \in K$ *e* $a \cdot b = 0$, *então* $a = 0$ *ou* $b = 0$. .

Dem:

$\square$

Observação 1.3.

Como é usual, escreveremos $a - b$ (**subtração** de a por b) em vez de $a + (-b)$. Analogamente escreveremos a **divisão** de a por $b \neq 0$ como $a \cdot \dfrac{1}{b}$ ou $\dfrac{a}{b}$.

Também usaremos ab, em vez de $a \cdot b$ e a^n para $aaa \cdots a$, (n vezes).

Exemplos 1.4. 1. *O conjunto* $\mathbb{Q} := \{p/q, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, *com as operações de soma e produto definidas por* $p/q \cdot r/s = pr/qs$ *e* $p/q + r/s = (ps + rq)/rs$ *é um exemplo de corpo.*

2. *O conjunto* $\mathbb{Z}_p := \{0, 1, 2, \cdots, p - 1\}$, $p \in \mathbb{N}$, *primo com as operações de soma e produto definidas por*

$a + b :=$ *resto da divisão de* $a + b$ *por* p,

$a \cdot b :=$ *resto da divisão de* ab *por* p, *é um exemplo de corpo.*

Definição 1.5. *Um* ***corpo ordenado*** *é um corpo* K, *no qual se destacou um subconjunto* P, *chamado o* conjunto dos elementos positivos *de* K, *satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) **(P1)** *Se* $a, b, \in P$, *então* $ab \in P$.
(2) **(P2)** *Se* $a, b, \in P$, *então* $a + b \in P$.
(3) **(P3)** *Se* $a \in K$, *então uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre:* $a = 0$, $a \in P$ *ou* $-a \in P$.

Diremos que a é **positivo** e escreveremos $a > 0$ ou $0 < a$ se $a \in P$ e que a é **negativo** se $-a > 0$. Dizemos que a é **não negativo** e escreveremos $a \geq 0$ ou $0 \leq a$ se $a \in P \cup \{0\}$ e que a é **não positovo** se $-a \geq 0$.

Dizemos que a é menor do que b e escrevemos $a < b$ se $a - b < 0$ ou $b - a > 0$.

Dizemos que a é menor ou igual a b e escrevemos $a \leq b$ se $a < b$ ou $a = b$.

Dizemos que a é maior do que b e escrevemos $a > b$ se $b < a$.
Dizemos que a é maior ou igual a b e escrevemos $a \geq b$ se $b \leq a$.

Observação 1.6. *Do item* (3) *da definição 1.5 segue que para quaisquer $a, b \in K$, vale uma única das alternativas: $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.*

As regras usadas para manipulação de desigualdades, podem ser deduzidas a partir das propriedades das relações $a < b$ e $a > b$, definidas acima. Temos, por exemplo, os seguintes resultados:

Proposição 1.7. *Sejam a, b e c elemntos de um corpo ordenado K.. Então valem as seguintes propriedades*

(1) *Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$ (propriedade transitiva).*
(2) *Se $a < b$, então $a + c < b + c$.*
(3) *Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.*
(4) *Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.*

Dem:

$\square$

Num corpo ordenado, indicando provisoriamente o elemento neutro da adição por e, temos que $1 \cdot e := e$, $2 \cdot e := e + e$, $3 \cdot e := e + e + e$ e definindo indutivamente $(n+1)\cdot e := n\cdot e + e$, segue da definição 1.5, item (2) e do PIF que $n \cdot e \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observando que $n \cdot e < (n+1)\cdot e$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos identificar $n \cdot e$ com n, pensar que $\mathbb{N}$ está contido em K e denotar $n \cdot e$ simplesmente por n.

Proposição 1.8. (1) *Para todo* $a \in K$, $a \neq 0$, *temos* $a^2 > 0$.
(2) $1 > 0$.
(3) $n > 0$, *para todo natural* n.
(4) $n + m > n$, *para quaisquer* $, m \in \mathbb{N}$

Dem:

$\square$

Observação 1.9. *Observando que o oposto* $-n$ *e o inverso multiplicativo de* $1/n$ *de* n *deve estar em* K, *podemos analogamente pensar que o conjunto dos racionais* Q *está contido em qualquer corpo ordenado* K.

Observação 1.10. *A relação* $a \leq b$ *satisfaz as propriedades:*
(1) $a \leq a$, *para todo* $a \in K$ *(reflexiva).*
(2) *Se* $a, b, c \in K$ $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *então* $a \leq c$ *(transitiva).*
(3) *Se* $a, b \in K$ $a \leq b$ *e* $b \leq a$ *então* $a = b$ *(anti-simétrica).*

Uma relação desse tipo é denominada uma ***relação de ordem*** *em* K.

Uma propriedade que será bastante útil no que segue é a não existência de um elemento mínimo em P. Ou seja:

Proposição 1.11. *Se* $a \in K$ *e* $0 \leq a \leq \epsilon$, *para todo* $\epsilon > 0$, *então* $a = 0$.

Dem:

$\square$

Num corpo ordenado K, podemos efetuar todas as manipulações algébricas usuais que permitem, por exemplo, resolver equações e inequações de vários tipos.

Para isto, usaremos frequentemente a seguinte proposição e seu corolário:

Proposição 1.12. *Se* $a, b \in L$ *e* $ab > 0$ *então vale uma única das alternativas*

(1) $a > 0$ *e* $b > 0$.
(2) $a < 0$ *e* $b < 0$.

Dem:

□

Corolário 1.13. *Ase* $a, b \in L$ *e* $ab < 0$ *então vale uma única das alternativas*

(1) $a > 0$ *e* $b < 0$.
(2) $a < 0$ *e* $b > 0$.

Dem:

□

Exemplos 1.14. (1) *Encontre os valores de* $x \in K$ *tais que* $2x + 4 \leq 7$.
(2) *Encontre os valores de* $x \in K$ *tais que* $x^2 - x - 5 < 1$.
(3) *Determine o conjunto:*

$$C := \{x \in K : \frac{2x+1}{x-2} < 1\}$$

Podemos também provar desigualdades, tais como como a importante

Proposição 1.15. ***(Desigualdade de Bernoulli)*** *Se* $x \in K, x > -1$, *então*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.1. **Intervalos e valor absoluto.** Num corpo ordenado K podemos definir a importante noção de intervalos, de vários tipos.

O intervalo fechado de extremos a e b:

$$[a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}.$$

O intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos a e b:

$$[a, b[:= \{x \in K : a \leq x < b\}.$$

O intervalo fechado à direita e aberto à esquerda de extremos a e b:

$$]a, b] := \{x \in K : a < x \leq b.\}$$

O intervalo aberto de extremos a e b:

$$]a, b[:= \{x \in K : a < x : b\}.$$

O intervalo ilimitado à direita fechado à esquerda:

$$[a, +\infty[:= \{x \in K : a \leq x < +\infty[\}.$$

O intervalo ilimitado à direita aberto à esquerda:

$$]a, +\infty[:= \{x \in K : a < x < +\infty[\}.$$

O intervalo ilimitado à esquerda fechado à direita:

$$]-\infty, b] := \{x \in K : -\infty < x \leq b\}.$$

O intervalo ilimitado à esquerda aberto à direita:

$$]-\infty, b] := \{x \in K : -\infty < x \leq b\}.$$

O intervalo total:

$$K =]-\infty, \infty] := \{x \in K : -\infty < x < \infty\}.$$

Nas definições acima, estamos supondo que $a \leq b$. Exceto no caso em que $a = b$, os intervalos acima são sempre conjuntos infinitos (por que?)

Definimos agora o **módulo** ou **valor absoluto** de um elemento $a \in K$, por

$$a := \begin{cases} a, \text{ se } a > 0 \\ 0, \text{ se } a = 0 \\ -a, , \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Proposição 1.16. (1) $|ab| = |a||b|$, *para quaisquer* $a, b \in K$.

(2) $|a|^2 = a^2$, *para todo* $a \in K$.

(3) $|a| = \max\{a, -a\}$, *para todo* $a \in K$.

(4) *Se* $a, x \in K, a > 0$, *então* $|x| < a$ *se e somente se* $-a < x < a$.

Dem:

$\square$

Como consequẽncia do ítem (4), temos que, se $a > 0$, o conjunto $\{x \in K : |x| < a\}$ é o intervalo aberto centrado no 0, $]-a, a[$. e mais geralmente, $\{x \in K : |x - c| < a\}$ é o intervalo aberto centrado em c, $]c - a, c + a[$.

A seguinte desigualdade será usada frequentemente

Proposição 1.17. ***A desigualdade triangular*** *Se $a, b \in K$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.*

Dem:

$\square$

Corolário 1.18. *Se $a, b \in K$, então $|a - b| \geq ||a| - |b||$.*

Dem:

$\square$

Exemplos 1.19.
Determine o conjunto $A := \{x \in K : |2x-3| < 5\}$ *(ou seja escreva* A *como um intervalo ou união de intervalos).*

Determine o conjunto $A := \{x \in K : |2x-3| < 5\}$ *(ou seja escreva* A *como um intervalo ou união de intervalos).*