O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

1. Propriedades e consequências da Completividade

No que segue, denotaremos por $\sup A$ e $\inf B$, o supremo e ínfimo de conuntos limitados superiormente e inferiormente, respectivamente.

A seguinte propriedade simples será frequentemente útil

Proposição 1.1. *Se $A \neq \emptyset$, $s = \sup A$ e $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $s - \epsilon < a \leq s$. Se $i = \inf A$ e $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $i \leq a < a + \epsilon$.*

Dem: Imediata a partir da definição. $\square$

Teorema 1.2. *(Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$) Se $x \in \mathbb{R}$, existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$, tal que $n > x$ (ou seja $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ não é limitado superiormente).*

Dem: Suponha que a propriedade não valha. Então $\mathbb{N}$ é limitado superiormente e, portanto, existe o supremo $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Pela propriedade anterior, existe então $n \in \mathbb{N}$, tal que $s - 1 < n \leq s$. Mas então $s = s - 1 + 1 < n + 1$ e s não pode ser majorante de $\mathbb{N}$. $\square$

Corolário 1.3. *Se $\epsilon > 0$ existe $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $1/n < \epsilon$.*

Dem:

Date: April 28, 2021.

□

Podemos agora mostrar que $\sqrt{2}$ existe em $\mathbb{R}$, ou, mais precisamente:

Proposição 1.4. *Existe um número real x tal que $x^2 = 2$.*

Dem: Seja $A := \{y \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. O conjunto A é não vazio e majorado por 2 pois: i) se $y \in A$ e $y \leq 1$ então $y \leq 1 < 2$, ii) se $y \in A$ e $y > 1$ então $y < y^2 < 2$. Seja $s := \sup A$. Afirmo que $s^2 = 2$. De fato, consideremos as duas outras alternativas: $s^2 < 2$ e $s^2 > 2$. No primeiro caso, vamos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que $s + \epsilon \in A$, o que contradiz a hótese de s ser majorante. De fato, temos para todo $\epsilon > 0$: $(s+\epsilon)^2 = s^2 + 2s\epsilon + \epsilon^2$. Tomando $\epsilon < \min\{(2-s^2)/3s, s\}$ teremos:

$$(s+\epsilon)^2 < s^2 + 3s\epsilon < s^2 + (2 - s^2) = 2,$$

e, portanto, $(s+\epsilon) \in A$, contradição.

No segundo vamos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que $s - \epsilon$ é majorante de A, o que contradiz a hótese de s ser o menor majorante. De fato, temos, para todo $\epsilon > 0$: $(s-\epsilon)^2 = s^2 - 2s\epsilon + \epsilon^2$. Tomando $\epsilon < \min\{(2-s^2)/2\}$ teremos:

$$(s-\epsilon)^2 > s^2 - 2s\epsilon > s^2 + (2 - s^2) = 2,$$

e, portanto, $(s-\epsilon)^2 > a^2$. para todo $a \in A$. Além disso, tomando ϵ suficientemente pequeno $(s-\epsilon) > 0$ e concluímos que $a < (s-\epsilon)$, para todo $a \in A$, portanto $(s-\epsilon)$ é majorante de A e menor do que s, contrariando a hipótese de s ser o menor majorante. □

Observação 1.5. *Como $1 \in A$, o número $s := \sup A$ acima deve ser maior do que 1 em particular positivo. Não pode haver nenhum outro número real positivo r talque $r^2 = 2$, pois $0 = s^2 - r^2 = (s-r)(s+r) = 0 \Leftrightarrow s = r$. De agora em diante indicaremos esse número por $\sqrt{2}$.*

Observação 1.6. *Substituindo o conjunto A pelo conjunto: $B := \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$, e se existisse o supremo s de B em Q, concluiríamos, procedendo como acima, que $s^2 = 2$. Mas, como vimos, não existe um número racional com esta propriedade. Portanto o conjunto B não tem supremo em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma da completividade (dizemos simplesmente que $\mathbb{Q}$ não é completo).*

1.1. **Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.** Embora existam muitos números em $\mathbb{R}$, que não são racionais (chamados **irracionais**), podemos provar que todo número real pode ser aproximado por números racionais. Mais precisamente.

Teorema 1.7. *O conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, se $x.y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, então existe um número racional r tal que $x < r < y$.*

Esboço da demonstração: Pelo Corolário 1.3, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $1/n < y - x$. Então existirá um $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m/n < y$ (porquê?). $\square$

A mesma propriedade de densidade pode ser demonstrada para os irracionais, como corolário, ou seja:

Corolário 1.8. *O conjunto dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, se $x.y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, então existe um número irracional z tal que $x < z < y$.*

Dem: $\square$

O resultado seguinte, conhecido como ‘Princípio dos Intervalos Encaixantes“ é equivalente ao Axioma do Supremo. Vamos provar apenas um lado da implicação.

Teorema 1.9. *Seja* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ *uma seqência de intervalos fechados e limitados,* $I_n = [a_n, b_n]$*. Então a interseção* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *é não vazia. Mais exatamente,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]$*, onde* $a = \sup a_n$ *e* $b = \inf b_n$*.*

Dem:

$\square$

Corolário 1.10. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais é não enumerável.*

Dem:

□

Corolário 1.11. *Todo intervalo não degenerado é não enumerável.*

Dem:

□

Corolário 1.12. *O conjunto* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *dos números irracionais é não enumerável.*

Dem:

□