O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

1. Completividade

Uma pergunta natural neste ponto seria: por que o corpo dos números racionais não é sufciente para os propósitos da Análise? Uma resposta pode ser: porque comprimentos de segmentos podem não ser números racionais. De fato, temos o seguinte fato surpreendente, primeiro reconhecido pelos pitagóricos gregos:

Proposição 1.1. *Não existe uma número racional x, tal que $x^2 = 2$.*

Dem:

Suponhanos que $x = p/q \in \mathbb{Q}$ seja tal que $p^2/q^2 = 2$. Podemos supor, simplificando caso necessário, que p e q não são ambos pares.

Então temos $p^2 = 2q^2$. Como o quadrado de um número impar é ímpar, devemos ter $p = 2r$. Mas então $4r^2 = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2r^2$ e segue que p e q são ambos pares; uma contradição. □

Nosso objetivo então será adicionar mais uma propriedade ao corpo ordenado K para superar esta limitaçõ.

Precisamos primeiro de alguns conceitos.

Definição 1.2. *Seja A um conjunto não vazio do corpo ordenado K.*

Dizemos que A é ***limitado superiormente ou majorado****, se existir algum elemento $b \in K$ tal que $x \leq b$. para todo $x \in A$. O elemento b é chamado de* ***limitante superior ou majorante*** *de A.*

Date: April 28, 2021.

Dizemos que A é ***limitado inferiormente ou minorado****, se existir algum elemento $a \in K$ tal que $x \geq a$. para todo $x \in A$. O elemento a é chamado de* ***limitante inferior ou minorante*** *de A.*

Dizemos que A é **limitado** se A for limitado superiormente e inferiormente, ou seja, se existir um intervalo $I := [a, b]$ de K tal que $A \subset I$.

Exemplo 1.3.
- *O conjunto $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ é limitado (em $\mathbb{Q}$).*
- *O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ é limitado inferiormente , mas não superiormente. (em $\mathbb{Q}$).*

A definição seguinte será de importância fundamental no que segue.

Definição 1.4. *Seja $A \subset K$ um conjunto limitado superioremnte. Dizemos que $s \in K$ é* ***supremo*** *de S (em K) se forem satisfeitas as duas seguintes condições:*

(a) *s é um majorante de A.*
(b) *Nenhum elemento de K, menor do que s é um majorante de A. Ou seja, se $r < s$, então existe um elemento $a \in A$, tal que $a > r$.*

As condições (a) e (b) podem ser resumidas na afirmação: s é o menor dos majorantes de A.

Definição 1.5. *Seja $A \subset K$ um conjunto limitado inferiormente. Dizemos que $i \in K$ é* ***ínfimo*** *de A (em K) se forem satisfeitas as duas seguintes condições:*

(a) *i é um minorante de A.*
(b) *Nenhum elemento de K, maior do que i é um minorante de A. Ou seja, se $r > i$, então existe um elemento $a \in A$, tal que $a < i$.*

As condições (a) e (b) podem ser resumidas na afirmação: i é o maior dos minorantes de A.

Exemplos 1.6. *Se $A \subset K$ possui um maior elemento $M \in A$, sentão M é supremo de A.*

Sejam $a < b$ em K e $I := [a, b[$, um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita. Então a é mínimo de A e portanto também ínfimo de A e b é supremo de A porém não é máximo de A.

Proposição 1.7. *Seja $A \subset K$ limitado superiormente. Então, o supremo, se existir é único.*

Dem:

$\square$

Definição 1.8. *Dizemos que o corpo ordenado K é* ***completo*** *se todo subconjunto $A \subset K$ limitado superiormente possui um supremo (em K).*

Observação 1.9. *O corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo.*

De fato, o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ é limitado superiormente e não possui supremo.

Podemos agora enunciar a propriedade fundamental da completividade.

Proposição 1.10. *(O AXIOMA DA COMPLETIVIDADE) Existe uma corpo ordenado completo* $\mathbb{R}$ *que será chamado de corpo dos números reais.*