1. Preliminares

1.1. **Conjuntos.** Numa teoria formal os objetos são apenas conjuntos mas, aqui, como é usual num tratamento informal, distinguimos *conjuntos* e *elementos* de conjuntos. Escrevemos $x \in A$, quando x pertence a A. e $x \notin A$ caso contrário.

Dados dois conjuntos A e B, escrevemos $A \subset B$ ou $B \supset A$ e dizemos que A está contido em B ou B Contém A, se todo elemento de A é também elemento de B e, ocasionalmente $A \subsetneq B$ se $A \subset B$, mas existe pelo mentos um elemento de B que não está em A.

Definição 1.1. *Diremos que os conjuntos A e B são* iguais *se $A \subset B$ e $B \subset A$.*

Os conjuntos são normalmente designados por listagem de seus elementos ou por alguma propriedade definidora. Suporemos familiaridade com alguns conjuntos numéricos:

- O conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$,
- O conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$,
- O conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$,
- O conjunto dos números reais.

1.1.1. *Operações sobre conjuntos.*

Definição 1.2.

(1) *A* união *de dois conjuntos A e B é o conjunto: $A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$. (o "ou" é inclusivo),*
(2) *A* interseção *de dois conjuntos A e B é o conjunto: $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$,*
(3) *O* complemento *do conjunto B relativamente ao conunto A é o conjunto: $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$.*

O conjunto que não contém nehum elemento é denominado *conjunto vazio* e denotado por $\emptyset$. Dois conjuntos A e B são *disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 1.3. *(Leis de De Morgan) Se A, B e C são conjuntos então:*

(1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
(2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Dem:

$\square$

A união ou interseção de uma quantidade finita ou infinita de conjuntos será denotada por

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \quad \text{e} \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,$$

sendo Λ um conjunto finito ou infinito de índices.

1.2. **Produtos Cartesianos e Funções.**

Definição 1.4. *Se A e B são conjuntos não vazios, o* produto cartesiano *$A \times B$ de A por B é o conjunto dos* pares ordenados *(a, b), com $a \in A$ e $b \in B$, ou seja*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Exemplo 1.5. $A := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\} = [-1, [$, $B := \{y \in \mathbb{R} : 2n\pi \leq x < (2n+1)\pi, n \in \mathbb{N}\}$.

Vamos agora definir o conceito fundamental de *função*, primeiro de maneira informal.

Definição 1.6. *Uma* função *do conjunto A no conjunto B é uma "regra" ou "corespondência" que associa a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$.*

Uma definição em termos de conjuntos pode ser dada identificando uma função com seu *gráfico*

Definição 1.7. *Uma* função *do conjunto A no conjunto B é um subconjunto f do produto cartesiano $A \times B$ tal que, para cada $a \in A$, existe um único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

O conjunto A é o *domínio* de f, denotado por Df, e o conjunto dos elementos $b \in B$, para os quais existe $a \in A$ tal que $(a, b) \in f$ é a *imagem* de f, denotada por $Im(f)$.

Denotaremos uma tal função por $f : A \to B$ e por $f(a)$, o único elemento de B tal que $(a, b) \in f$.

Definição 1.8. *Se $f : A \to B$ é uma função e $E \subset A$ e $H \subset B$, então*

- *A* imagem direta *de E sob f é $f(E) := \{f(x) : x \in E\}$.*
- imagem inversa *de H sob f é $f^{-1}(H) := \{x \in A : f(x) \in H\}$.*

Exemplo 1.9. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2$ e*

- $E := \{x : 0 \leq x \leq 2\}$,
- $G := \{y : 0 \leq y \leq 4\}$,
- $H := \{x : -1 \leq y \leq 1\}$.

Rntão:

- *A imagem direta de E é $f(E) = \{y : 0 \leq y \leq 4\} = G$.*
- *A imagem inversa de G é $f^{-1}(G) = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$.*

Portanto, $f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(G) \neq E$. Por outro lado, $f(f^{-1}(G) = G$. Mas $f(f^{-1}(H) = \{y : 0 \leq y \leq 1\} \neq H$.

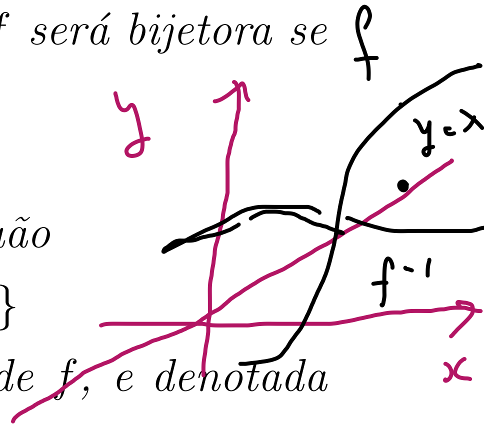
1.2.1. *Tipos especiais de funções.*

Definição 1.10. *Seja $f : A \to B$ uma função.*

(1) *Dizemos que f é* injetora *se $f(x_1) \neq f(x_2)$, sempre que $x_1 \neq x_2$.*
(2) *Dizemos que f é* sobrejetora *se $Imf = f(A) = B$.*
(3) *Dizemos que f é* bijetora *se ela é injetora e sobrejetora.*

Exemplo 1.11. *Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ e $f : A \to B$, com $B \subset \mathbb{R}$ $f(x) := 2x/(x-1)$. Então f é injetora.*

Agora $f(x) = y \Leftrightarrow x = y/(y-2)$. Portanto, f será bijetora se e somente se $B \subset \{y \in \mathbb{R} : y \neq 2\}$.



1.2.2. *Funções inversas.*

Definição 1.12. *Se $f : A \to B$ é bijetora, então*

$$g := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$$

is uma função, denominada a função inversa *de f, e denotada por f^{-1}.*

Exemplo 1.13.

Observemos que se f é bijetora a função inversa de f pode ser caracterizada por $D(f^{-1}) = Imf$, $Im(f^{-1}) = Df$ e

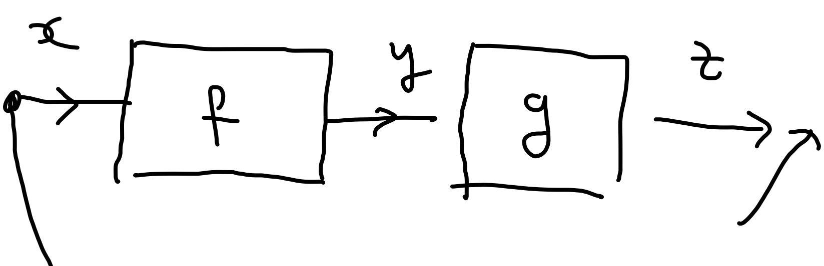
$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a).$$

No exemplo 1.11 temos
que a função inversa de f tem domínio $D(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 2\}$, $Im(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ e $f^{-1}(y) = y/(y-2), \forall y \in D(f^{-1})$.

1.2.3. *Composição de funções.*

Definição 1.14. *Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ e $Imf \subset C$, definimos a funç ao composta $g \circ f$ de A em D, por*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \ \forall x \in A.$$



Exemplos 1.15. (1) *Sejam $f, g : R \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := 2x$, $g(x) := 3x^2 - 1$. Então ambas as compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ estão definidas em $\mathbb{R}$ e:*

$$g \circ f(x) = 12x^2 - 1, \quad f \circ g = 6x^2 - 2.$$

(2) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por$f(x) := 1 - x^2$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) := \sqrt{x}$, então $f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está bem definida e $f \circ g(x) = 1 - x$.*

Por outro lado $g \circ f$ não está bem definida, como função com domínio $\mathbb{R}$. Para defini-la, precisamos restringir a função f *a um domínio A de tal forma que $f(A) \subset D(g) = \mathbb{R}^+$. Ou seja, devemos ter $A \subset \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$. (Frequentemente, isto não é dito explicitamente. Nesse caso, entendemos que o domínio da funcção composta é o "maior no qual a expressão obtida tenha sentido".)*

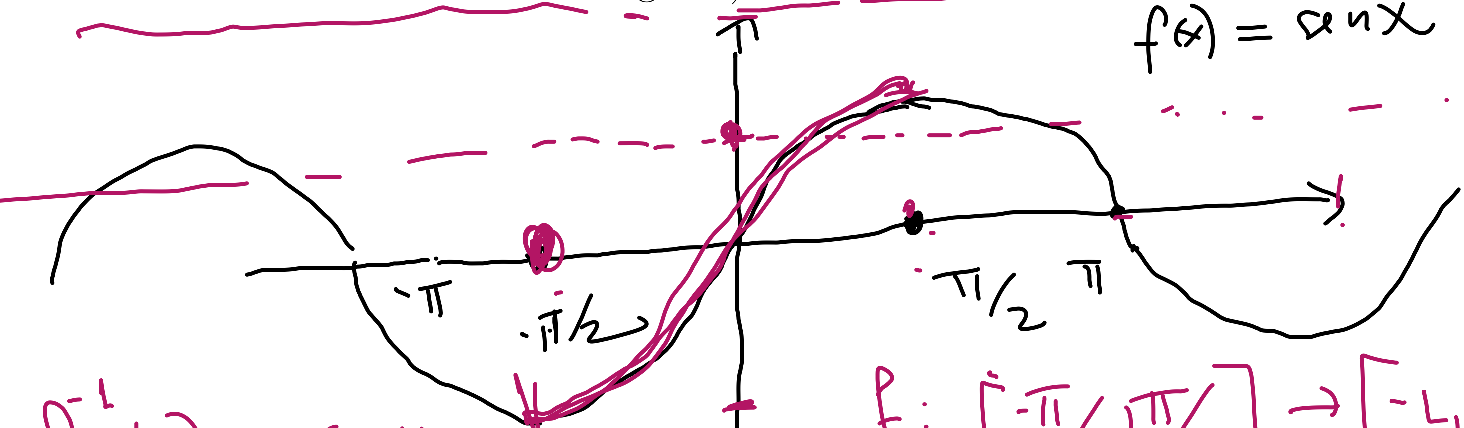
1.2.4. *Restrição de funções.* Se $f : A \to B$, e $A_1 \subset A$ podemos definir uma (nova) função $f : A_1 \to B$ por

$$f_1(x) := f(x), \forall x \in A_1.$$

a função f_1 é denominada a *restrição* de f a A_1.

Isto pode ser útil em algumas situações como, por exemplo, no exemplo anterior e também para obter uma função com melhores propriedades. Por exemplo, as funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ não são injetoras, nem sobrejetoras, quando consideradas como funçcõe de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Entretando, elas podem ser tornadas injetoras por restrição conveniente de modo a podermos definir as suas inversas (em domínios também restringidos).

$f(x) = \operatorname{sen} x$



$f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$

$f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$