1. Números naturais e o princípio de indução finita

2. Um pouco de história

A origem da noção de "números naturais" se perde no tempo e se confunde com a necessidade prática de contagem de objetos, começando, inicialmente, do 2. Um desenvolvimento muito importante foi a introdução de *numerais* para representar números. Os antigos egípcios e babilônios possuíam sistemas distintos de representação que incluíam o 1 como um número. Um desenvolvimento muito posterior foi a introdução do 0, que aparece entre os babilônios na notação posicional por volta de 700 A.C. e entre os maias e olmecas na América Central, como um número separado por volta do século I A.C.

O número 0 foi usado também nos computus (calculadoras da Idade Média européia), começando com Dionysius Exiguus em 525 porém sem um numeral para representá-lo.

O uso do numeral 0 da forma moderna se originou na obra do matemático indiano Brahmagupta em 628 D.C.

Os primeiros estudos sistemáticos de números como abstrações aparecem em torno do século VI e são usualmente atribuídos aos filósofos gregos Pitágoras e Arquimedes, embora estudos independentes tenham ocorrido, mais ou menos na mesma época, na India, China e América Central.

O desenvolvimento da teoria moderna dos números naturais iniciase no século XIX, com discussões sobre a natureza exata desses números entre matemáticos e filósofos. Definições baseadas na teoria dos conjuntos são propostas foram propostas por Dedekindm Gottlob Frege e Bertrand Russel, posteriormente modificadas para evitar certos paradoxos.

Uma outra vertente da teoria, iniciada por Charles S. Peirce. Richard Dedekind e, especialmente, Giuseppe Peano, baseia-se na *axiomatização*, isto é, na apresentação de *princípios básicos* ou *axiomas*, a partir dos quais toda a teoria deve ser desenvolvida com base em argumentos lógicos. Os famosos *Axiomas de Peano* fornecem uma estrutura simples, elegante e muito bem sucedida no desenvolvimento da teoria dos números naturais.

(1) 1 é um número natural.
(2) O sucessor de todo nḿero natural é um número natrual
(3) 1 não é sucessor de nenhum número natural.
(4) Dois números naturais distintos têm sucessores distintos
(5) Se um conjunto de nḿeros naturais contém o 1 e o sucessor de qualquer número natural, então ele contém todos os números naturais.

O 5^o axioma de Peano é uma forma do *Princípio de Indução Finita* e coloca de maneira precisa a ideia de "raciocínio indutivo", que aparece anteriormente em contextos variados, matemáticos e não matemáticos.

Um dos primeiros exemplos conhecidos de uso implícito de raciocínio indutivo em Matemática encontra-se em Parmênides (um dos "diálogos" de Platão), por volta de 370 AC. O princípio intimamente relacionado da "Descida Infinita" aparece na obra de Euclides para provar, por exemplo, que todo número composto pode ser dividido por um primo.

O princípio também aparece de forma implícita na obra de matemáticos árabes e, em particular, na prova do teorema binomial escrita por al-Karali, por volta de 1000 DC.

Mais modernamente, o princípio foi usado, embora ainda não explicitamente enunciado, por Pierre de Fermat em comentários à margem de sua cópia da edição de 1621 da *Arithmetica* de Diofanto.

A primeira formulação explícita do princípio foi dada por Pascal em seu *Traité du triangle arithmétique* e usado na prova de resultados para o arranjo numérico hoje conhecido como *Triângulo de Pascal.* O princípio também foi bastante utilizado por Jakob Bernoulli e se tornou a partir daí, se tornou amplamente conhecido na comunidade matemática.

O tratamento moderno e rigoroso do princípio inicia-se no século 19, com George Boole, Augustus de Morgan, Charles Sanders Peirce e Richard Dedekind. Como já mencionamos Giuseppe Peano coloca o princípio como último axioma em seu tratamento axiomático dos números naturais.

2.1. **Definição por indução.** Numa forma um pouco mais moderna, os Axiomas de Peano podem ser enunciados da seguinte forma. Primeiro supomos a existência de um conjunto $\mathbb{N}$, uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e um elemento distinguido, denotado por 1 em $\mathbb{N}$. Dizemos que $s(n$ é o *sucessor* de n e Sobre esses objetos supomos válidas as seguintes propriedades:

(1) 1 não é sucessor de nenhum núero natural (ou seja $1 \in \mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$.
(2) Dois números naturais distintos têm sucessores distintos (ou seja, s é injetora).
(3) (Princípio de Indução) Se um conjunto de nḿeros naturais contém o 1 e o sucessor de qualquer número natural, então ele contém todos os números naturais.

(Observemos que (1) e (3) implicam que $\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N}) = 1$).

O Princípio de Indução é fundamental na prova de afirmções sobre números naturais, como veremos na próxima seção.

O Princípio também está na base das *definições por Indução.* Por exemplo, podemos definir a soma ($+$) de números naturais por

(1) $n + 1 = s(n)$,

(2) $n + s(m) := s(n + m)$.

(O fato de que (1) e (2) dão uma definição apropriada é uma consequência do PIF, que não provaremos aqui). Tendo a operação de soma definida podemos definir o produto de maneira análoga e a a *relação de ordem* $<$ em $\mathbb{N}$ dizendo que $n < m$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n + p = m$.

A partir dessas definições podemos mostrar as conhecidas propriedades das operações e da relação de ordem. No vamos, porém, fazer isto aqui e suporemos essas propriedades conhecidas. Em vez disso, vamos considerar mais de perto o uso do PIF na prova de proposies envolvendo essas operaes.

3. Uma reformulação do princípio

Suporemos conhecido o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, bem como as operações usuais de soma e produto e suas propriedades básicas.

Começamos com algumas observações sobre notação. Proposições ou afirmações serão normalmente denotadas por P, Q, etc e indicaremos por $P(n)$ uma afirmação envolvendo o número natural n. Por exemplo, $P(n)$ poderia ser a afirmação; "$3^n - 1$ é um número ímpar." Em particular, $P(4)$ afirma que $3^4 - 1$ *é um número ímpar* (que é uma afirmação falsa, já que $3^4 - 1 = 80$). A afirmação: " $3^n - 1$ é um número ímpar, para todo número natural n", pode ser escrita mais sucintamente na forma "$P(n)$, para todo número natural n", ou ainda "$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$. " usando o símbolo $\forall$ de "quantificador universal".

O símbolo $\Rightarrow$ indica uma *implicação*, isto é, escrevemos $P \Rightarrow Q$, para a afirmação "se P então Q", ou seja "Q é verdadeira, sempre que P é verdadeira."

O símbolo $\wedge$ indica a junção de afirmações, ou seja, escrever $P \wedge Q$ é o mesmo que afirmar P e Q simultaneamente.

O *Princípio da Indução Finita* pode ser assim enunciado:

Teorema 3.1 (Princípio da Indução Finita - PIF)**.** *Para cada número natural n consideremos uma afirmação $P(n)$. Suponhamos que:*

(1) $P(1)$ é verdadeira (base da indução),

(2) Para todo número natural n, $P(n)$ implica $P(n+1)$ (passo de indução).

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural. n.

Outras formas equivalentes do Princípio podem ser apresentadas. Uma delas é formulada em termos de conjuntos satisfazendo uma determinada propriedade, como no último axiomas de Peano. Uma outra variação é sobre a escolha do primeiro número que aparece na base da indução que, frequentemente, ó 0 e não o 1 e, mais geralmente, algum outro número inteiro n_0.

O PIF é de importância fundamental na demonstração de fórmulas envolvendo números naturais. Aapesar de ter uma interpretação bastante intiuitiva, sua compreensão e aplicação costumam trazer muitas dificuldades para estudantes de vários níveis.

Na próxima seção, procuramos dar uma ideia intuitiva do PIF usando uma analogia e, na seguinte, apresentamos um exemplo.

4. A analogia da princesa no castelo

Muitas analogias são frequentemente utilizadas para esclarecer o significado do PIF, entre as quais:

- A transmissão e uma mensagem ao longo de uma fileira de soldados,
- A partida de um trem, vagão por vagão,
- A queda de uma fileira de dominós,
- A subida de uma escada, degrau por degrau

- A entrada de uma princesa em qualquer dos os quartos trancados de um palácio (talvez infinito,) dado que ela tem a chave do primeiro quarto e cada quarto contém a chave do próximo quarto,

A última analogia é talvez menos conhecida, mas é bem sugestiva. Imaginemos que os quartos estão numerados, o primeiro é o de número 1, o segundo o 2, o terceiro 3 e assim sucessivamente. Consideremos a afirmação: "A princesa pode chegar ao quarto n. Como a princesa tem a chave do primeiro quarto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$. o que corresponde à hipótese base (1) no princípio de indução. Agora, se ela já conseguiu entrar no quarto de número k, então ela pode usar a chave que lá está e entrará também no próximo quarto, de número $k + 1$ (hipótese (2) no princípio de indução). O que o princípio afirma é o fato bem intuitivo de que ela conseguirá então visitar qualquer quarto do castelo (na vida real, ela teria que ter tempo e paciência suficientes, mas essas considerações de ordem prática não aparecem no princípio abstrato...).

Probleminha Sugerir outras analogias.

5. Um exemplo

Observemos as seguintes igualdades:

- $1 = 1$,
- $1 + 3 = 4$,
- $1 + 3 + 5 = 9$,
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$,

É natural conjecturar daí que o mesmo vale para a soma dos primeiros n naturais, para qualquer n, ou seja:

- $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Ou ainda, usando a notação de somatória:

Proposição 5.1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$.

(Podemos também escreve na forma $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = (n)^2.$, se quisermos evitar o índice 0).

Vamos usar o PIF para mostrar a validade desta afirmação. Indicando por S_n a somatória $S_n = \sum_{i=0}^{n}(2i+1)$, a afirmação $P(n)$ fica; $S_n = (n+1)^2$.

Passo base: $P(0)$ afirma simplesmente que $1 = 1$ que é, evidentemente, uma afirmação verdadeira.
Passo indutivo: Suponhamos que, para um nḿero natural k, a afirmação $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, admitamos que:

$$S_k = (k+1)^2, \; k \geq 0.$$

Vamos mostrar que desta igualdade, podemos obter a igualdade:

$$S_{k+1} = ((k+1)+1)^2$$

ou seja,

$$P(k) \Rightarrow P(k+1) \text{ para todo número natural} k.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} S_{k+1} =& \sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = \overbrace{\sum_{i=0}^{k}(2i+1)}^{S_k} + 2(k+1) + 1 \\ =& S_k + 2k + 3 = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 \\ =& (k+2)^2. \end{aligned}$$

Tendo mostrado que ambas as hipóteses (1) e (2) do PIF são verificadas, podemos concluir do PIF que vale a tese, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ que é exatamente o que foi afirmado na Proposição. (uma prova como esta é denominada *prova por indução*).

Probleminha Sugerir e provar outras propriedades.

6. Dificuldades e erros conceituais

Uma das razões para a dificuldade no uso do PIF que seu enunciado do PIF é uma sentença lógica relativamente complicada. Isto pode ficar mais claro, usando símbolos lógicos:

$$[P(1) \wedge (\forall n \; P(n) \rightarrow P(n+1)]] \rightarrow [\forall n P(n)]$$

que pode ser representado esquematicamente por:

$$\text{Hipótese1 } + \text{Hipótese2}\} \Rightarrow Tese$$

As afirmações mais familiares em Matemática têm, em geral, uma estrutura mais simples. Por exemplo, no nosso exemplo inicial, a igualdade: $\forall n \; \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ é do tipo $\forall n \in \mathbb{N}, \; P(n)$. Note-se que, neste caso, o simpbolo de implicação ($\Rightarrow$) não aparece. Uma outra afirmação um pouco mais parecida com o PIF seria: "Se n e m são números naturais múltiplos de 3 então $(n+m)$ é múltiplo de 3". Ou, usando símbolos lógicos $(3|n) \wedge (3|m) \Rightarrow 3|(n+m)$ que tem uma estrutura mais semelhante ao do PIF. Note-se, entretanto, que as duas hipóteses, neste caso, são bastante simples. No caso do PIF a segunda hipóteese é bem mais elaborada e *contém ela mesmo uma outra implicação!* Esta é uma dificuldade real que só pode ser superada com algum esforço e reflexão. O uso de analogias, como as que já mencionamos pode ajudar, desde que não sejam esquecidas as diferenças entre elas e o enunciado preciso. Outra estratégia que pode auxiliar é 'refrasear' o princípio. Uma possibilidade seria a seguinte:

- Definir um *subconjunto indutivo* de N como sendo aqueles que contém os sucessores de seus elementos.

- Expressar o axioma da idução como: 'O único subconjunto aditivo de N que contém o 1 (ou o 0) ó próprio N'.

Pode parecer estranho que uma afirmação relativamente elaborada como o PIF seja usada na demonstração de outras afirmações aparentemente mais simples. Esta pode ser uma boa oportunidade para esclarecer a ideia de *prova* em Matemática como o estabelecimento de fatos, com base em outros, aceitos como axiomas ou previamente derivado deles, por meio de argumentos lógicos. É importante ressaltar que essas "regras do jogo" não são meras filigranas acessórias, mas se mostraram necessárias, ao longo da história, para evitar dúvidas e paradoxos advindos de raciocínios imprecisos ou 'intuitivos". Em particular, podem ser dados exemples de erros devidos ao uso da indução vulgar e analogias paara formular conjecturas numéricas. (Os exemplos que seguem foram retirados do artigo *Vale para 1, para 2, para 3, ... vale sempre?*, R. Watanabe, RPM no 09.)

Exemplos

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^2 + n + 41$ é um número primo (falso para $n = 41$).
(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ 2^n não começa com 9. (falso para (falso para $n = 59$)
(3) Todo número natural par maior do que 2 é soma de dois primos (não se sabe!)

Uma dúvida frequente no uso do PIF é uma aparente circularidade, já que no passo indutivo a afirmação $P(n)$ é *suposta válida*, sendo que isto é exatamente o que se pretende provar (para todo $n \in \mathbb{N}$). A dificuldade aqui está no entendimento do papel dos quantificadores e do significado da implicação. o que se faz nesse passo não é supor a validade da afirmação para todo n mas, sim que (para qualqer n) a eventual validade para n acarreta a validade para $n+1$. Para superar essa dificuldade é necessário que se tenha compreendido a estrutura do PIF e o significado da implicação. A aparência de circularidade pode ser amenizada, dando um outro nome para a variável, durante o estágio de prova do passo indutivo, como fizemos no exemplo ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$), para indicar o caráter "provisório" dessa variável.

Outras dúvidas que podem ocorrer são: a necessidade de provar o passo base e a necessidade de provar o passo de indução para todos os valores de n *inclusive para* $n = n_0$. A maneira mais simples de esclarecer esses pontos é apresentar contra-exemplos ou 'pseudo-exemplos', que podem ser divertidos e curiosos.

Exemplos

(1) Seja $P(n)$ a afirmação: "$2n+1$" é um número par, para todo $n \in N$. Verifique que o segundo passo do PIF vale.
(2) Todos os cavalos têm a mesma cor.

7. Formas equivalentes do PIF

Pode-se mostrar que o axioma da indução é equivalente (no contexto dos números naturais) a resultados conhecidos como o *Princípio da boa ordem*, o o *Segundo princípio da Indução*.

Para enunciar o princípio da boa ordem, precisamos da noção de mínimo de um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Definição 7.1. *Seja S um subconjunto dos números naturais. Diremos que $p \in S$ é* elemento mínimo *(ou menor elemento de S) se $p \leq s$ para todo $s \in S$.*

Analogamente, podemos definir elemento máximo ou maior elemento de S. Observemos que $S = \mathbb{N}$, não possui elemento máximo, mas 1 é o (único) elemento míminimo de $\mathbb{N}$.

Teorema 7.2. *Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio de N possui um (único) elemento mínimo.*

Dem. (Usando o PIF)

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e vamos supor que S não possui um elemento mínimo.

Seja $I_n := \{1, 2, 3, \cdots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$. e $X := \{n \in \mathbb{N} : I_n \subset \mathbb{N} \setminus S\}$.

Vamos mostrar que $X = \mathbb{N}$ (pelo PIF).

Afirmo que $1 \in X$. De fato, se $1 \notin X$ então $1 \in S$. Mas então 1 seria elemento miínimo de S, em contradição com a hipótese de que S não possui elemento mínimo.

Vamos supor agora que um número natural $k \in X$ (hipótese de indução). Então temos que $I_k \subset \mathbb{N} \setminus S$. Afirmo que $k+1 \in X$. De fato, se isto não ocorresse então teríamos que $k+1 \in S$. Como todo número natural menor ou igual a k está em $N \setminus S$ segue que $k+1$ seria mínimo de S.

Portanto, $k \in X$ **então** $k+1 \in X$**.**

Pelo PIF segue que $X = \mathbb{N}$. Daí obtemos que $I_n \subset \mathbb{N} \setminus S$. Em particular $n \in \mathbb{N} \setminus S$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Concluímos que $S = \emptyset$. Portanto, temos uma contradição Segue que S tem que possuir elemento mínimo.

$\square$

Tendo demonstrado que PIF $\Longrightarrow$ Princípio da Boa Ordem, vamos mostrar agora que, deste último, segue a seguinte versão do PIF:

Teorema 7.3. *Segundo Princípio da Indução: Para cada número natural n consideremos uma afirmação $P(n)$. Suponhamos que:*

(1) $P(1)$ é verdadeira,

(2) Para todo número natural n, se $P(k)$ é verdadeira para todo $1 \leq k \leq n$ então $P(n+1)$ é verdadeira

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq n_0$.

Dem. (Usando o Princípio da Boa Ordem)

Seja $S \subset \mathbb{N}$ satisfazendo (1) e (2) e suponhamos que $S \neq \mathbb{N}$

Então, conjunto $X := N \setminus S \neq \emptyset$. Pelo princípio da boa ordem X possui um elemento mínimo m. Agora, devemos ter $n > 1$ pois $1 \in S$, por (1). Além disso, $\{1, 2, \cdots m-1\} \subset S$. Mas então, por (2), segue que $m = (m-1)+1 \in S$, o que é uma contradição pois $m \in X$ e $X \cap S = \emptyset$.

Consscluímos que $S = \mathbb{N}$

$\square$

Observação 7.4. *Mostramos então que o Princípio de Indução implica o Prinçipio da Boa Ordem m* $\mathbb{N}$ *e este, por sua vez implica a segunda versão do PIF. Não é dificil mostrar que esta, por sua vez, implica a validade do PIF. Segue que essas* 3 *proposições são* ***todas equivalentes****.*

Para os interessados em mais detalhes recomendamos, entre outros excelentes textos: *Análise Real - vol I* de Elon L. Lima e *Elementos de Álgebra* de L. H. Jacy Monteiro. (Nosso tempo, ao contrário dos números naturais, é finito....).

Antônio L. Pereira
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo - São Paulo - Brazil
E-mail address: alpereir@ime.usp.br