1. Conjuntos finitos, enumeráveies e não enumeráveis

1.1. **Conjuntos finitos.** Denotaremos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais, ou seja:

$$I_n := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n.\}$$

I_n será o nosso "conjunto finito prototípico", ou seja, os demais serão definidos em termos destes. Mais exatamente, temos a seguinte

Definição 1.1. *Um conjunto $A \neq \emptyset$ é dito* **finito** *se existir uma função bijetora $\phi : I_n \to A$, para algum $n \in \mathbb{N}$. O número n é então o número de elementos de A. Se $A = \emptyset$ diremos que A tem zero elementos.*

Observação 1.2. *Se A e B são conjuntos quaisquer, diz-se que A é* ***equipotente*** *a B, se existir uma função bijetora $\phi : A \to B$. Como, nesse caso, $\phi^{-1} : B \to A$ é também bijetora segue que B é equipotente a A, e podemos dizer simplesmente que* ***A e B são equipotentes****.*

A primeira coisa a fazer é mostrar que a noção de *número* de elementos está univocamente definida, ou seja. que não podem existir funções bijetoras $\phi : I_n \to A$ e $\psi : I_m \to A$ com n e m distinto (ainda que isto possa parecer óbvio).

Para este fim, vamos primeiro mostrar um resultado auxiliar.

Lema 1.3. *Dados $k, l \in I_n$, existe uma função bijetora $\phi : I_n \to I_n$, tal que $\phi(k) = l$.*

Dem:

□

Teorema 1.4. *Se existir uma função bijetora $\phi : I_n \to I_m$ então $n = m$.*

Dem:

Vamos provar o resultado por indução sobre m. Suponhamos que $m = 1$. Então, para todo $k \in I_n$, devemos ter $\phi(k) = 1$ Sendo ϕ injetora, segue que I_n tem um único elemento, ou seja, $n = 1$.

Agora, suponhamos que o resultado vale para $m = k$ e seja $\phi : I_n \to I_{k+1}$ função bijetora. Vamos definir uma função bijetora de $\tilde{\phi} : I_{n-1} \to I_k$, da seguinte maneira: Se $\phi(n) = k + 1$ então $\tilde{\phi}$ é, simplesmente, a restrição $\phi_{|I_{n-1}}$. Se não, seja $l \in I_n$ tal que $\phi(l) = k + 1$ e $\psi : I_n \to I_n$ uma função bijetora tal que $\psi(n) = l$. Então definimos $\tilde{\phi}$ por $\phi \circ \psi_{|I_{n-1}}$. Segue da hipótese de indução, que $n - 1 = k \Rightarrow n = k + 1$.

Do Princípio de Indução finita, segue que o resultado vale para todo $m \in \mathbb{N}$.

□

Os seguintes fatos são imediatos a partir da definição:

(1) Um conjunto A tem n elementos se e somente se existir uma bijeção de A em I_n.

(2) Um conjunto A tem n elementos se e somente se existir uma bijeção de A em um conjunto B que tem n elementos.
(3) Um conjunto A é finito se e somente se existir uma bijeção de A em um conjunto B que é finito.

Muitos outros fatos "óbvios" sobre os conjuntos finitos podem ser provados, rigorosamente, a partir da definição 1.1, frequentemente usando o PIF. Eis alguns deles:

Proposição 1.5. (1) *Se A possui n elementos, B possui m elementos e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ possui $m + n$ elementos.*
(2) *Se A possui n elementos, $B \subset A$ então B possui m elementos, $m \leq n$ e $m = n$ se e somente se $A = B$.*
(3) *Se A é finito e $B \subset A$ então B é finito.*
(4) *A é finito e existe uma injeção de B em A, então B é finito. O mesmo vale, se existir uma sobrejeção de B em A.*
(5) *Um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ é finito se e somente se A possui um elemento máximo (isto é; $m \in A$ e $m \geq k$, para todo $k \in A$).*

$\square$

1.2. **Conjuntos infinitos.**

Definição 1.6. *Dizemos que o conjunto A é infinito se A não for finito.*

A partir da definição e dos fatos provados acima para conjuntos finitos podemos obter vários resultados para conjuntos infinitos. Por exemplo, se $A \subset B$ e A é infinito então B é infinito. se A é infinito e B é finito então $A \setminus B$ é infinito.

Um questão que pode ser cololocada é sobre a existência de conjuntos inifinitos. O resultado seguinte responde esta pergunta.

Teorema 1.7. *O conjunto N dos números naturais é infinito.*

$\square$

1.3. **Conjuntos infinitos enumeráveis e infinitos não enumeráveis.**

Definição 1.8. *Dizemos que o conjunto A é infinito enumerável se A não for finito e A for equipotente a $\mathbb{N}$. Dizemos que A é enumerável, se A for finito ou infinito enumerável.*

Exemplos 1.9. *O conjunto P dos nḿeros naturais pares é enumerável. De fato, $\phi(n) = 2n$ define uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre P.*

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável (encontre uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Z}$).

Algumas propriedades seguem imediatamente da definição. Por exemplo,se se A é enumerável e existe uma bijeção $\phi : A \to B$ então B é enumerável. Outras, embora aparentemente óbvias, requerem uma prova um pouco mais elaborada.

Proposição 1.10. *Todo subconjunto A de $\mathbb{N}$ é enumerável.*

Dem: Se A é finito, nada há a demonstrar. Suponhamos que A seja infinito. Vamos definir uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to A$ de maneira informal e deixar para o leitor a tarefa de escrever a prova rigorosa (sugestão: indução).

Seja $a_1 = \min A$. Definimos $\phi(1) = a_1$. Sendo A infinito $A \setminus \{a_1\}$, ínfinito e existe $a_2 = \min A \setminus \{a_1\}$ e assim sucessivamente...

$\square$

Corolário 1.11. *Se A é enumerável então todo subconjunto B de A é enumerável. Ou, equivalentemente, se existir uma injeção $\phi : B \to A$ então B é enumerável.*

Dem:

$\square$

Proposição 1.12. *O conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Dem:

Definimos $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $\phi(n, m) = 2^n 3^m$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, ϕ é injetora. O resultado segue do corolário 1.11. $\square$

Corolário 1.13. *Se* A *é enumerável, o produto cartesiano* $A \times A$ *é enumerável.*

Dem:

$\square$

Proposição 1.14. *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é enumerável.*

Dem:

$\square$

Para o próximo (e importante) resultado, vamos adotar a notação 2^A para o conjunto das funções do conjunto A em $\{0, 1, \}$, ou seja:

$$2^A := \{f : A \to \{0, 1\}\}$$

.

Teorema 1.15. *(Teorema de Cantor) Se A é um conjunto não vazio, então não existe nenhuma função sobrejetora $\phi : A \to s^A$. Em particular, A e 2^A não são equipotentes.*

Dem: Suponha que $\phi : A \to 2^A$ é uma função. Vamos mostrar que existe uma função $f \in 2^A$ que não está na imagem de ϕ. Indiquemos por ϕ_a a função imagem de a por ϕ. Para cada $a \in A$ definimos $f(a) := 0$, se $\phi_a(a) = 1$ e $f(a) := 1$, se $\phi_a(a) = 0$. Como $f(a) \neq \phi_a(a)$, segue que f não está na imagem de ϕ.

$\square$

Observação 1.16. *Podemos construir uma bijeção do conjunto das partes de A, $\mathcal{P}(A)$ em 2^A, pondo $\phi(B)(x) = 1$ se $x \in B$ e $\phi(B)(x) = 0$, se $x \in A \setminus B$. Portanto, podemos trocar 2^A, por $\mathcal{P}(A)$ no Teorema de Cantor.*

Corolário 1.17. *O conjunto $2^{\mathbb{N}}$ é não enumerável.*

Observação 1.18. *Diz-se que dois conjuntos A e B têm* ***a mesma cardinalidade*** *e escreve-se $card(A) = card(B)$ se são equipotentes, isto é, se existe uma função bijetora $\phi : A \to B$.*

Também se diz que a cardinalidade de A é menor que a de B ($card(A) < card(B)$), quando existe uma função injetora de A em B, mas não existe uma uma função sobrejetora de A em B. Em particular, se A e B são finitos então $card(A) = card(B)$ se e somente se A e B têm o mesmo número de elementos e $card(A) < card(2^A)$, para todo $A \neq \emptyset$.