Nivelamento de Matemática – FEAUSP – 2021.1
Prof.ª Tatiana Paim
paim@ime.usp.br

Tópico 1 – NÚMEROS
Avaliação T_1

Questão 1. O número real x, que satisfaz $3 < x < 4$, tem uma expansão decimal na qual os 999.999 primeiros dígitos à direita da vírgula são iguais a 3. Os 1.000.001 dígitos seguintes são iguais a 2 e os restantes são iguais a zero.
Considere as seguintes afirmações

I. x é irracional.

II. $x \geq \dfrac{10}{3}$.

III. $x \cdot 10^{2.000.000}$ é um inteiro par.

Então:

(a) nenhuma das três afirmações é verdadeira.

(b) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

(c) apenas a afirmação I é verdadeira.

(d) apenas a afirmação II é verdadeira.

(e) apenas a afirmação III é verdadeira.

Questão 2. Um grupo de alunos cria um jogo de cartas em que cada uma apresenta uma operação com números racionais. O ganhador é aquele que obtiver um número inteiro como resultado da soma de suas cartas. Quatro jovens ao jogar receberam as seguintes cartas:
O vencedor do jogo foi:

(a) Maria.

(b) Selton.

(c) Tadeu.

(d) Valentina.

Questão 3. Se

$$\begin{aligned} a &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} \cdot 4^{3/2} \cdot 36^{-1/2}}{10000^{-1/4}} \\ (25)^{b-2} &= \frac{1}{25} \\ c &= \left[3^{-1} - (-3)^{-1}\right]^{-1} \end{aligned}$$

então é correto afirmar que:

(a) $c < b < a$.

(b) $b < c < a$.

(c) $b < a < c$.

(d) $a < b < c$.

(e) $c < a < b$.

Questão 4. Se $a = 10^{-3}$, o valor de $\dfrac{0,01 \cdot 0,001 \cdot 10^{-1}}{100 \cdot 0,0001}$, em função de a, é:

(a) $100a$.

(b) $10a$.

(c) a.

(d) $\dfrac{a}{10}$.

(e) $\dfrac{a}{100}$.

Questão 5. A expressão

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-6} \cdot \frac{9-3x}{(-3x-6)},$$

para $x \neq 3$ e $x \neq -2$, é equivalente a:

(a) $\dfrac{x+2}{x-3}$

(b) $\dfrac{3-x}{x-3}$

(c) 1

(d) -1

(e) $x+2$

Questão 6. Se $-4 < x < -1$ e $1 < y < 2$, então xy e $\dfrac{2}{x}$ estão no intervalo:

(a) $]-8,-1[$.

(b) $\left]-2,-\dfrac{1}{2}\right[$.

(c) $]-2,-1[$.

(d) $\left]-8, -\frac{1}{2}\right[$.

(e) $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

Questão 7. Considere dois números positivos x e y, com $x > y$, tais que

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 8 \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 15 \end{cases}$$

Nessas condições, $2x$ é igual a:

(a) 31.

(b) 32.

(c) 33.

(d) 34.

(e) 35.

Questão 8. Atualmente um trabalhador que recebe um salário bruto até determinado valor possui isenção sobre a tributação do Imposto de Renda Retido na Fonte (IRRF). Uma pessoa, que é isenta, pediu o maior aumento possível ao seu chefe de forma que ainda deixe o seu salário bruto dentro dessa faixa de isenção. Suponha que o valor máximo para a isenção do IRRF seja de $R\$ \ 1.900,00$ e que essa pessoa pediu ao seu chefe um aumento de 12%. Caso o chefe conceda os 12% de aumento solicitado, essa pessoa receberá, em reais, um aumento de:

(a) $203,57$.

(b) $228,57$.

(c) $252,43$.

(d) $276,00$.

Questão 9. Um mercado vende três marcas de tomate enlatado, as marcas A, B e C. Cada lata da marca A custa 50% mais do que a da marca B e contém 10% menos gramas do que a da marca C. Cada lata da marca C contém 50% mais gramas do que a da marca B e custa 25% mais do que a da marca A. Se o rendimento do produto das três marcas é o mesmo por grama, então, é mais econômico para o consumidor comprar a marca:

(a) A.

(b) B.

(c) C.

(d) A ou B, indistintamente.

(e) B ou C, indistintamente.

Questão 10. A soma dos x reais tais que $||x-2|-7| = 6$ é:

(a) 15.

(b) 30.

(c) 4.

(d) 2.

(e) 8.

Solução da Avaliação T_1:

1. Resposta: apenas a afirmação III é verdadeira.

O número real x com as propriedades do enunciado é o número:

$$x = \underbrace{3,333\ldots3}_{999.999}\underbrace{222\ldots2}_{1.000.001}\ \underbrace{000\ldots0}_{\substack{algarismos\\ restantes}}$$

$$x = \underbrace{3,333\ldots3222\ldots2}_{2.000.000}$$

Vamos analisar cada item.

I. x não é irracional, pois é um decimal finito.

II. $x \leq \dfrac{10}{3}$, já que $3,333\ldots3222\ldots2 \leq 3,333\ldots$

III. $x \cdot 10^{2.000.000}$ é um inteiro par. De fato,

$$3,333\ldots3222\ldots2 \cdot 10^{2.000.000} = 3333\ldots3222\ldots\underline{2}$$

2. Resposta: Tadeu.

Maria: $$1,333\ldots + \frac{4}{5} + 1,2 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{7}{3} = \frac{17}{3}$$

Selton: $$0,222\ldots + \frac{1}{5} + 0,3 + \frac{1}{6} = \frac{2}{9} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{8}{9}$$

Tadeu: $$1,111\ldots + \frac{3}{10} + 1,7 + \frac{8}{9} = \frac{10}{9} + \frac{3}{10} + \frac{17}{10} + \frac{8}{9} = 4$$

Valentina: $$0,666\ldots + \frac{7}{2} + 0,1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{7}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{143}{30}$$

3. Resposta: $b < c < a$

$$a = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} \cdot 4^{3/2} \cdot 36^{-1/2}}{10000^{-1/4}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{4^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{36}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{10000}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{10}} = \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3} \approx 6,67$$

$$(25)^{b-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow (25)^{b-2} = (25)^{-1} \Rightarrow b - 2 = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$c = \left[3^{-1} - (-3)^{-1}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right]^{-1} = \left[\frac{2}{3}\right]^{-1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Portanto, $b < c < a$.

4. Resposta: $\dfrac{a}{10}$

$$\frac{0,01 \cdot 0,001 \cdot 10^{-1}}{100 \cdot 0,0001} = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10}}{100 \cdot \frac{1}{10000}} = \frac{\frac{1}{1000000}}{\frac{1}{100}} = \frac{1}{1000000} \cdot 100 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{a}{10}$$

5. Resposta: 1

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{9 - 3x}{(-3x - 6)}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{3 \cdot (3 - x)}{(-3)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{3 \cdot (-1) \cdot (x-3)}{(-3)(x+2)} = \frac{-3}{-3} = = 1$$

6. Resposta: $\left]-8,-\dfrac{1}{2}\right[$

Sendo $-4 < x < -1$ e $1 < y < 2$, vamos analisar os valores de x e y próximos dos extremos dos intervalos. Temos então quatro casos.

Caso 1. $x \approx -4$ e $y \approx 1$

$$xy = -4 \quad \text{e} \quad \frac{2}{x} = -\frac{1}{2}$$

Caso 2. $x \approx -4$ e $y \approx 2$

$$xy = -8 \quad \text{e} \quad \frac{2}{x} = -\frac{1}{2}$$

Caso 3. $x \approx -1$ e $y \approx 1$

$$xy = -1 \quad \text{e} \quad \frac{2}{x} = -2$$

Caso 4. $x \approx -1$ e $y \approx 2$

$$xy = -8 \quad \text{e} \quad \frac{2}{x} = -2$$

O menor extremo nos quatro casos é -8 e o maior, $-\dfrac{1}{2}$. Assim, xy e $\dfrac{2}{x}$ pertencem ao intervalo $\left]-8,-\dfrac{1}{2}\right[$.

7. Resposta: 34

Dado que

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} = 8 & \text{(I)} \\ \sqrt{x^2-y^2} = 15 & \text{(II)} \end{cases}$$

desenvolvendo (I), temos:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)^2 &= 8^2 \\ \Rightarrow\ x+\cancel{y}+2\sqrt{x^2-y^2}+x-\cancel{y} &= 64 \\ \Rightarrow\ 2x+2\cdot 15 &= 64 \\ \Rightarrow\ 2x &= 64-30 \\ \Rightarrow\ 2x &= 34\ , \end{aligned}$$

donde substituimos a expressão (II) na 3^a linha.

8. Resposta: 203,57

Seja x o salário desta pessoa. Se ela pessoa recebe um aumento de 12% de seu salário, passará a receber $x \cdot 1,12$. O novo salário não deve ultrapassar $R\$\ 1.900,00$. Assim,

$$\begin{aligned} x \cdot 1,12 &< 1900 \\ x &< \frac{1900}{1,12} \\ x &< 1696,43 \end{aligned}$$

Portanto, a diferença entre o salário atual e o salário anterior resulta em um aumento de $1900 - 1696,43 = R\$\ 203,57$.

9. Resposta: B.

Marca	Preço	Gramas	Preço/grama
A	$1,5 \cdot x$	$0,9 \cdot 1,5 \cdot y$	$\dfrac{1,5 \cdot x}{0,9 \cdot 1,5 \cdot y} = 1,11\ldots \cdot \dfrac{x}{y}$
B	x	y	$\dfrac{x}{y}$
C	$1,25 \cdot 1,5 \cdot x$	$1,5 \cdot y$	$\dfrac{1,25 \cdot 1,5 \cdot x}{1,5 \cdot y} = 1,25 \cdot \dfrac{x}{y}$

Como

$$\frac{x}{y} < 1,111\ldots \cdot \frac{x}{y} < 1,25 \cdot \frac{x}{y}\ ,$$

segue que a marca B é mais econômica para o consumidor.

10. Resposta: 8

Tome $a = |x-2|$ um número real. Então:

$$\begin{aligned} ||x-2|-7| = 6 \quad &\Rightarrow \quad |a-7| = 6 \\ &\Rightarrow \quad a-7 = 6 \quad \text{ou} \quad -(a-7) = 6 \\ &\Rightarrow \quad a = 13 \quad \text{ou} \quad a = 1 \end{aligned}$$

Daí, voltando à subtituição inicial:

$$\begin{aligned} |x-2| = 13 \quad &\Rightarrow \quad x-2 = 13 \quad \text{ou} \quad -(x-2) = 13 \\ &\Rightarrow \quad x = 15 \quad \text{ou} \quad x = -11 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} |x-2| = 1 \quad &\Rightarrow \quad x-2 = 1 \quad \text{ou} \quad -(x-2) = 1 \\ &\Rightarrow \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Portanto, $15 - 11 + 3 + 1 = 8$.