ESTABILIDADE DIRECIONAL E EMPENAGEM

J.A.P.Aranha

Abril de 2009

1. MASSA ADICIONAL

Seja um corpo com volume V, dimensão característica d, definida como o *diâmetro equivalente* $V = (4\pi/3)\cdot(d/2)^3$, e massa m, preso a uma mola com rigidez k; para *pequenas oscilações* – e, no caso presente, podemos supor que isso implica em $A << d$, onde A é a amplitude da oscilação – a *freqüência natural* ω_n desse oscilador em um fluido pouco denso ($\rho V << m$, com ρ sendo a densidade do fluido) é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{1a}$$

O movimento desse oscilador em um fluido denso – água, por exemplo, onde $\rho V \approx m$ – é bem mais lento, com um período $T_{n,a}$ maior e freqüência $\omega_{n,a} = 2\pi/T_{n,a}$ menor. Isso ocorre porque o deslocamento do corpo transmite ao fluido um movimento e a *energia cinética do fluido* soma-se à *energia cinética do corpo* aumentando a inércia do sistema hidro-mecânico. Se U(t) for a velocidade do corpo, as energias cinéticas do corpo e fluido, respectivamente T_c e T_f, podem ser expressas na forma

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \mathsf{T}_c = \tfrac{1}{2}\, m\mathrm{U}^2; \\ \circ\ \mathsf{T}_f = \tfrac{1}{2}\, m_a\mathrm{U}^2; \end{array}\right\} \Rightarrow \mathsf{T} = \mathsf{T}_c + \mathsf{T}_f = \tfrac{1}{2}\left(m + m_a\right)\mathrm{U}^2, \tag{1b}$$

onde m_a, a inércia adicionada pelo fluido ao oscilador, é denominada *massa adicional*; de (1b) segue

$$\omega_{n,a} = \sqrt{\frac{k}{m + m_a}}\,. \tag{1c}$$

1.1: Massa Adicional – Escoamento Bi-Dimensional

A massa adicional é da ordem de ρV, pois essa é a escala de massa no problema, mas depende fundamentalmente da *direção do movimento*. Consideremos corpos bi-dimensionais no plano $(x_1;x_2)$. Para um *círculo* a massa adicional para um movimento na direção x_1 é igual à massa adicional para um movimento na direção x_2 e ambas são iguais a ρV, conforme indicado na Fig.(1). Para uma *elipse* com eixo menor $2b$, perpendicular a x_1, e eixo maior $2a$, perpendicular a x_2, a massa adicional m_{11} é menor que m_{22}, a relação entre ambas sendo proporcional à *razão de esbeltez* ao quadrado ou

$$\frac{m_{11}}{m_{22}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 . \qquad (2)$$

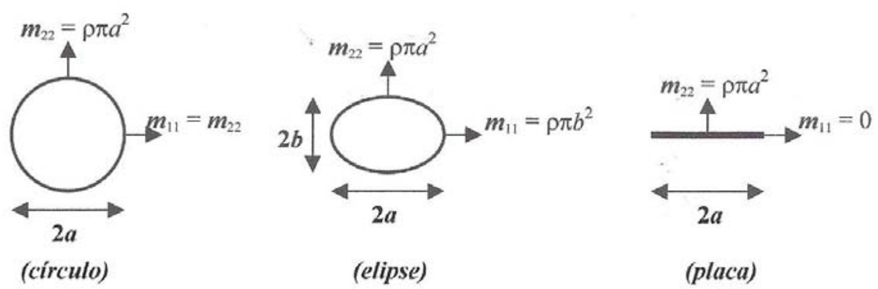

FIG.(1): *Escoamento Bi-Dimensional:* massas adicionais nas direções x_1 e x_2.

1.2: Massa Adicional – Corpos de Revolução Esbeltos

Seja agora um corpo de revolução esbelto, com comprimento l na direção x_1 e raio máximo $r_o << l$ no plano transversal (x_2; x_3), onde $\varepsilon = 2r_o/l << 1$, ver Fig.(2).

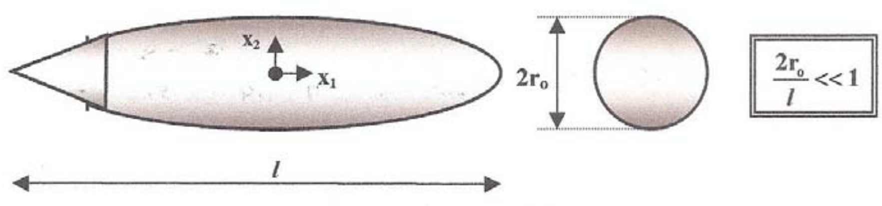

FIG.(2): Corpo de Revolução Esbelto; $\varepsilon = 2r_o/l$.

Consideremos o escoamento causado por um movimento do corpo com velocidade U_2 na direção x_2. Como $l/2r_o = 1/\varepsilon >> 1$, em primeira aproximação o escoamento em torno de uma seção x_1 = cte. qualquer corresponde a um escoamento *bi-dimensional* em torno de um círculo de raio $r(x_1)$; a energia cinética nesse plano é assim dada por (ver Fig.(1))

$$dT_f(x_1) = ½\ \rho\left(\pi r(x_1)\right)^2 U_2^2\ dx_1 .$$

Integrando em x_1 e observando que o volume V do corpo é dado por

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} r^2(x_1)dx_1$$

obtém-se

$$\begin{aligned} &\circ\ M_{22} = \rho V; \\ &\circ\ M_{11}/\rho V \cong \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \ln \varepsilon\right), \end{aligned} \qquad \left(\varepsilon = \frac{2r_o}{l}\right) \tag{3}$$

a última expressão sendo uma extensão *tri-dimensional* da relação (2) para a elipse.

A hipótese de esbeltez do corpo é fundamental neste resultado: uma esfera, por exemplo, é um corpo de revolução *não-esbelto* com massa adicional ½ ρV.

2. MOMENTO DE MUNK

Os escoamentos no entorno de corpos são, em geral, profundamente rotacionais e a *força de arrasto* é diretamente proporcional ao *rotacional do campo de velocidades*. Nos problemas usuais de Engenharia, no entanto, o objetivo é definir geometrias – dos aviões, submarinos, navios, torpedos etc. – que minimizem a rotacionalidade do campo de velocidades e com ela a força de arrasto: em um bom projeto de Engenharia, portanto, a geometria do corpo deve ser de tal forma que garanta um escoamento “quase” irrotacional.

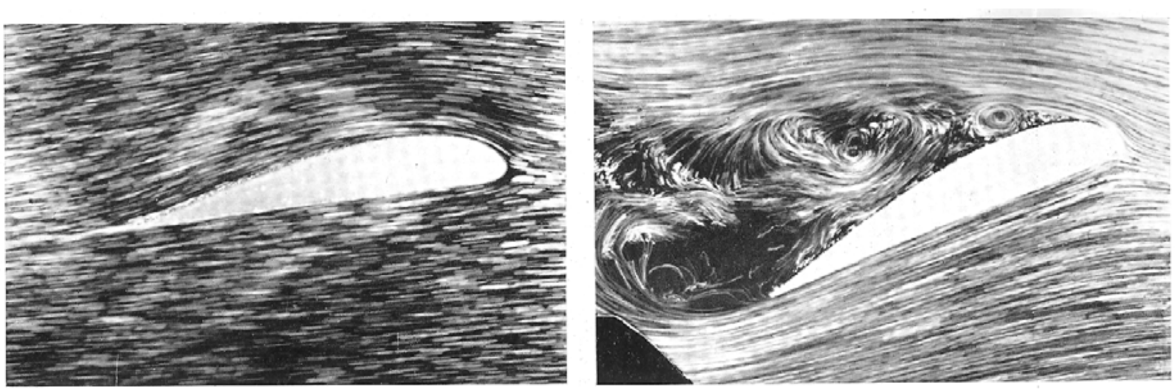

FIG.(3): *Esquerda:* Corpo esbelto (fólio) com pequeno ângulo de ataque em relação à corrente; escoamento “quase” irrotacional. *Direita:* Mesmo corpo com ângulo de ataque grande; o escoamento é rotacional (“estol”).

Como indicado na Fig.(3), os corpos afilados, orientados em uma direção quase paralela ao escoamento, produzem uma rotacionalidade “quase nula” no fluido e são, por isso, adequados para definirem as geometrias dos aviões, submarinos, navios, torpedos etc.

Em resumo, essas considerações motivam as seguintes hipóteses:

i) Considerar corpos afilados com pequenos "ângulos de ataque" em relação ao escoamento incidente (como visto no sistema que se desloca com o corpo);

ii) Supor que o escoamento seja irrotacional.

Como bem conhecido, um campo de forças $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ pode ser derivado de um potencial $\mathsf{U}(\mathbf{x},t)$ se o seu rotacional for nulo ou

$$rot\ \mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{x},t) = -\nabla \mathsf{U}. \ \text{(Teorema de Stokes)}$$

De forma análoga, em um *escoamento irrotacional* tem-se *rot* $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}$, com $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ sendo o campo de velocidades, e portanto existe uma função escalar $\phi(\mathbf{x},t)$, denominada *potencial de velocidade*, tal que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \nabla\phi(\mathbf{x},t)\,, \tag{4}$$

o campo de velocidades sendo então determinado pela equação de conservação de massa de um fluido incompressível, *div* $\mathbf{u} = 0$ ou $\nabla^2\phi = 0$. Essa equação é linear e pode-se aplicar, por isso, o princípio da superposição de efeitos: sejam assim $\{\phi_j(\mathbf{x});\ j = 1,2,3\}$ os potenciais de velocidade associados a *velocidades unitárias* do corpo nas direções $\{\mathbf{e}_1;\ \mathbf{e}_2;\ \mathbf{e}_3\}$; se $\mathbf{U}(t) = U_1(t)\,\mathbf{e}_1 + U_2(t)\,\mathbf{e}_2 + U_3(t)\,\mathbf{e}_3$ for a velocidade do corpo, o campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, induzido no fluido por esse movimento, é definido por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{3} U_i(t)\cdot\nabla\phi_i(\mathbf{x})\,. \tag{5a}$$

Seja V_f o domínio fluido; a *energia cinética* do fluido é definida pela expressão

$$\mathsf{T}_f = \tfrac{1}{2}\,\rho\int_{V_f}(\nabla\phi)^2\,dV_f\ ,$$

ou, com o auxílio de (5a), por

$$\begin{aligned} &\circ\ \mathsf{T}_f = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} M_{ij}U_i(t)U_j(t);\\ &\circ\ M_{ij} = \rho\int_{V_f}\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j\,dV_f\,, \end{aligned} \tag{5b}$$

os coeficientes de inércia cruzados M_{ij}, $i \neq j$, sendo nulos para um corpo de revolução; nesse caso tem-se

$$\mathsf{T}_f = ½ \left(M_{11} \cdot U_1^2(t) + M_{22} \cdot U_2^2(t) + M_{33} \cdot U_3^2(t) \right). \tag{6a}$$

Da Mecânica Analítica segue que a *quantidade de movimento* integral no volume fluido é dada por,

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\partial \mathsf{T}_f}{\partial \mathbf{U}} = M_{11} \cdot U_1(t)\ \mathbf{e}_1 + M_{22} \cdot U_2(t)\ \mathbf{e}_2 + M_{33} \cdot U_3(t)\ \mathbf{e}_2, \tag{6b}$$

e da segunda lei de Newton

$$-\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M_{11} \cdot \dot{U}_1(t)\ \mathbf{e}_1 + M_{22} \cdot \dot{U}_2(t)\ \mathbf{e}_2 + M_{33} \cdot \dot{U}_3(t)\ \mathbf{e}_2, \quad \left(\dot{U}_j = \frac{dU_j}{dt} \right) \tag{6c}$$

com $\mathbf{F}(t)$ sendo a força que o fluido aplica no corpo. Em um *movimento uniforme* ($dU_j/dt = 0$) a força é nula, um resultado esperado pelo menos no que toca a *força de arrasto*, a componente de $\mathbf{F}$ na direção do movimento: como já citado, esta componente de força depende diretamente da rotacionalidade do escoamento, nula em um escoamento irrotacional. Como veremos a seguir, o momento, no entanto, é diferente de zero em geral.

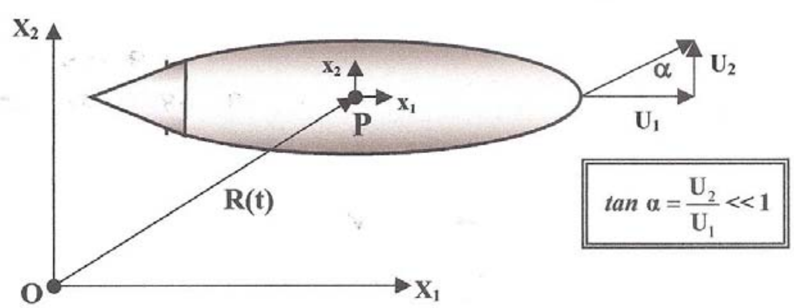

FIG.(4): Corpo de revolução se deslocando com velocidade **U**
(ângulo de ataque pequeno; $\alpha << 1$)

De fato, consideremos um corpo de revolução esbelto deslocando-se com velocidade uniforme $\mathbf{U} = U_1\mathbf{e}_1 + U_2\mathbf{e}_2$ através de um fluido em repouso no infinito; sejam também (O; X_1; X_2; X_3) um sistema de referências fixo no espaço e $\mathbf{R}(t)$ o raio vetor da origem P do sistema (P; x_1; x_2; x_3) fixo no corpo em relação ao sistema espacial; da cinemática segue

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{U}\,. \tag{7a}$$

A *quantidade de movimento angular* $\mathbf{A}_o(t)$ em relação a O é dada pelo produto vetorial $\mathbf{R}(t)\wedge\mathbf{P}$ e a variação no tempo de $\mathbf{A}_o(t)$ é igual ao momento $-\mathbf{N}_o = \mathbf{U}\wedge\mathbf{P}$ aplicada pelo corpo no fluido, pois $-\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt = \mathbf{0}$; no caso, o vetor velocidade $\mathbf{U}$ não é paralelo ao vetor quantidade de movimento $\mathbf{P}$, pois $M_{22} \neq M_{11}$, e portanto o momento $\mathbf{N}_o$, aplicado pelo fluido no corpo, fica dado pela expressão

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \mathbf{A}_o(t) = \mathbf{R}(t)\wedge\mathbf{P}; \\ \circ\ -\mathbf{N}_o = \dot{\mathbf{A}}_o(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\wedge\mathbf{P} = \mathbf{U}\wedge\mathbf{P}; \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{N}_o = -\left(M_{22} - M_{11}\right)U_1U_2\,\mathbf{e}_3\,. \tag{7b}$$

Este é o *momento de Munk*, com uma importância fundamental na estabilidade direcional de corpos esbeltos, como discutido a seguir.

3. PERTURBAÇÃO NO MOVIMENTO UNIFORME E INSTABILIDADE

Seja o corpo de revolução esbelto acima analisado, com *centro de massa* coincidente com a origem P do sistema local e distante cerca de ½ *l* das extremidades, e consideremos que ele se desloca em sua direção longitudinal com velocidade $U\mathbf{e}_1$ constante. Todas as forças atuantes – fluidas, de propulsão e peso próprio – transportadas para P fornecem resultante nula com um momento também nulo. Suponhamos que em uma determinada região de sua trajetória o corpo encontre uma “turbulência” e receba um “impulso vertical”, o efeito líquido deste impulso sendo uma velocidade “vertical” $U_2 = \tan\alpha\cdot U = U\cdot\alpha$, impondo um “ângulo de ataque” $\alpha << 1$, ver figuras (4) e (5).

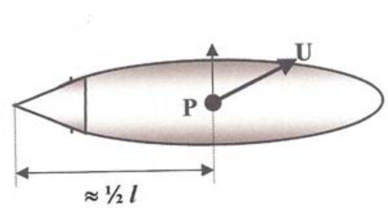

FIG.(5): Corpo de revolução *esbelto* deslocando-se com $U\mathbf{e}_1$ encontrando uma “turbulência” que impõe um ângulo de ataque $\alpha = U_2/U << 1$.

O ângulo de ataque $\alpha = U_2/U$ faz surgir um *momento de Munk* $\mathbf{N}_o$ dado por

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ \mathbf{N}_o \cong -\rho V \cdot U^2\alpha\ \mathbf{e}_3;\\ \circ\ V = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \pi r^2(x)dx;\end{array}\right\} \quad com \quad \begin{cases}\circ\ V = \pi r_o^2 l & (\textit{cilindro})\\ \circ\ V = \dfrac{2}{3}\pi r_o^2 l & (\textit{elipsóide})\\ \circ\ V = \dfrac{8}{15}\pi r_o^2 l & (\textit{parabolóide})\end{cases} \qquad (8a)$$

pois $M_{22} \cong \rho V$ e $M_{11} \cong 0$, ver (3) com $\varepsilon << 1$.

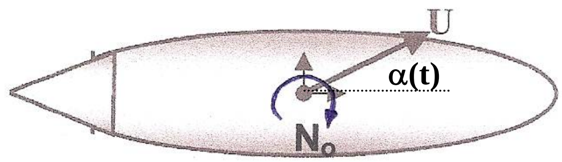

FIG.(6): Efeito desestabilizador do momento de Munk:
aumento do ângulo de ataque $\alpha(t)$.

Seja $\alpha(t)$ o ângulo entre o vetor velocidade **U** e o versor $\mathbf{e}_1$, crescente no sentido do momento $\mathbf{N}_o$ indicado na Fig.(6), pois o vetor U está fixo no espaço e o corpo gira sob a ação de $\mathbf{N}_o$. Supondo que $(P;\ x_1;\ x_2;\ x_3)$, com origem no "centro de massa" P do corpo, defina os eixos principais de inércia, da dinâmica de corpo rígido tem-se, quando se desprezam termos da ordem α^2 e o momento de inércia adicional $I_{33,a} << I_{33}$,

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ I_{33}\cdot\ddot{\alpha} = \rho V U^2\cdot\alpha;\\ \circ\ \varpi^2 = \dfrac{\rho V U^2}{I_{33}};\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(t) = \alpha(0)\cdot\cosh\left(\varpi\cdot t\right), \qquad (8b)$$

mostrando explicitamente o efeito desestabilizador do *momento de Munk*: dada uma perturbação inicial $\alpha(0)$, o ângulo $\alpha(t)$ cresce exponencialmente com o tempo. É evidente que este crescimento exponencial se dá logo no início pois, à medida que $\alpha(t)$ cresce, a *hipótese de irrotacionalidade* do escoamento vai perdendo a validade, como indicado na Fig.(3), e o modelo matemático tem que ser corrigido; de qualquer forma, para valores "grandes" de $\alpha(t)$ a aeronave "estola", com um aumento brutal da força de arrasto e concomitante perda de sustentação. A solução clássica para evitar essa *instabilidade*, conhecida de tempos imemoriais no "projeto" de flechas, é colocar na ré da fuselagem superfícies de sustentação (asas), denominadas "empenagens"[1], discutidas a seguir.

[1] Do francês *empennage*, penas de uma flecha, de *empenner*, colocar penas em uma flecha.

4. EMPENAGEM

Consideremos o corpo deslocando-se com velocidade U em uma direção que faz um ângulo α com o eixo longitudinal x_1; no sistema de referências *inercia*l que se desloca junto com o corpo, a empenagem na ré da aeronave vê um escoamento U incidindo com um "ângulo de ataque" $\alpha << 1$, como indicado esquematicamente na Fig.(7a).

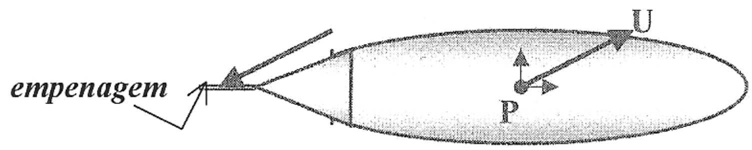

FIG.(7a): *Estabilizador:* Empenagem a ré da aeronave
(Vista no plano "vertical" (x_1; x_2))

A Fig.(7b) mostra o plano horizontal (x_1;x_3) da empenagem com sua seção transversal no plano vertical (x_1;x_2). A geometria da seção transversal, representada aí por uma elipse, é denominada *fólio* e possui uma forma geométrica característica: o *bordo de ataque* é arredondado, como na elipse, mas o *bordo de fuga* termina em um bico, com ângulo interno relativamente pequeno: o corte vertical do corpo de revolução apresentado na Fig.(2) tem a forma típica de um *fólio*[2].

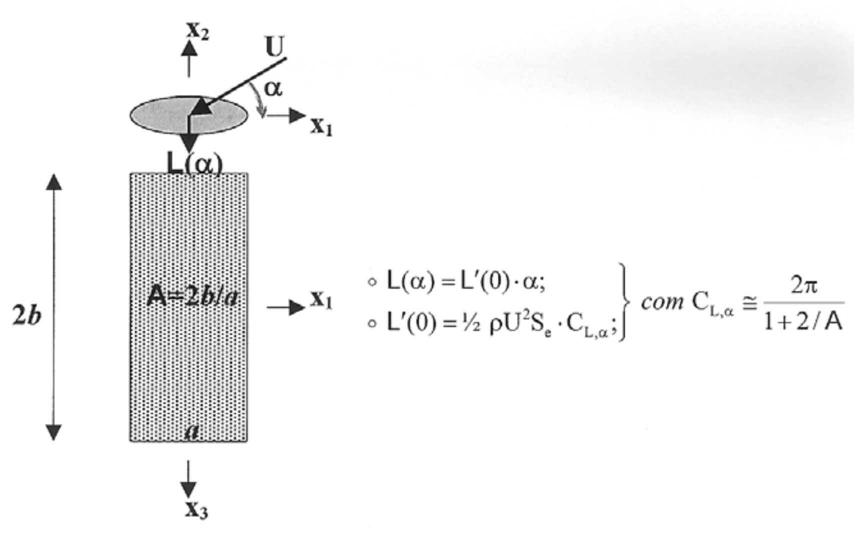

FIG.(7b): *Força de sustentação* $L(\alpha)$ devida
à empenagem no plano "horizontal" (x_1; x_3).

[2] Segundo se relata na literatura – ver Von Karman (1954), *Aerodynamics*, McGraw-Hill a geometria dos *fólios* foi inspirada pela observação de peixes (trutas) cortados no plano longitudinal.

Supondo que o fólio seja, como a elipse é, simétrico em relação ao eixo x_1, a *força de sustentação* $\mathsf{L}_{(2D)}(\alpha)$, por unidade de comprimento na direção x_3, é nula se $\alpha = 0$; para um ângulo de ataque pequeno, mas positivo, a simetria entre o escoamento e fólio é quebrada e aparece uma força de sustentação $\mathsf{L}_{(2D)}(\alpha)$ como indicada na figura. Expandindo a função $\mathsf{L}_{(2D)}(\alpha)$ em *série de Taylor* em torno de $\alpha = 0$ obtém-se $\mathsf{L}_{(2D)}(\alpha) = \mathsf{L}_{(2D)}(0) + (d\mathsf{L}_{(2D)}/d\alpha)_0\cdot\alpha + \ldots$ e como $\mathsf{L}_{(2D)}(0) = 0$ conclui-se que $\mathsf{L}_{(2D)}(\alpha) \cong (d\mathsf{L}_{(2D)}/d\alpha)_0\cdot\alpha$ para um ângulo de ataque pequeno; normalizando essa *força por unidade de comprimento* pela escala típica $½\ \rho U^2\cdot a$, com a sendo a corda do fólio, tem-se $\mathsf{L}_{(2D)}(\alpha)/½\ \rho U^2\cdot a \cong C_{L,\alpha}\cdot\alpha$: é possível demonstrar teoricamente e verificar experimentalmente que $C_{L,\alpha} \cong 2\pi$. Uma asa, no entanto, não é "infinitamente longa", embora seja tanto mais esbelta quanto maior for sua *razão de aspecto* $\mathsf{A} = s^2/S_e$, com S_e sendo a área da asa, igual a $2ba$ na Fig.(7b), e $s = 2b$ sua envergadura. A finitude da asa diminui o valor de $C_{L,\alpha}$ por um fator que depende da razão de aspecto A e da geometria da asa; para uma asa com forma elíptica no plano horizontal $(x_1;x_3)$ – e não retangular, como indicado na Fig.(7b) – pode-se demonstrar teoricamente e verificar experimentalmente que

$$C_{L,\alpha} \cong \frac{2\pi}{1+\dfrac{2}{\mathsf{A}}}, \qquad (9a)$$

um resultado que recupera o resultado do fólio no limite $\mathsf{A} \to \infty$ ($s \to \infty$). Dessa maneira

$$\mathsf{L}(\alpha) = \int_{-½\cdot s}^{½\cdot s} \mathsf{L}_{(2D)}(\alpha; x_3)dx_3 = ½\rho U^2 \cdot C_{L,\alpha} \cdot \left(\int_{-b}^{b} a(x_3)dx_3 \right) \cdot \alpha = ½\rho U^2 S_e \cdot C_{L,\alpha} \cdot \alpha, \qquad (9b)$$

com $S_e = 2ba$ sendo a área da empenagem. O momento de $\mathsf{L}(\alpha)$ em relação ao "centro de massa" P é aproximadamente igual a $\mathsf{L}(\alpha)\cdot½ l$ e deve ser maior que o *momento de Munk* N_o para estabilizar a aeronave; observando que o volume V do corpo de revolução é dado por $\gamma\cdot\pi r_o^2$, com $\gamma = 1$ para uma superfície cilíndrica, $\gamma = 2/3$ para um elipsóide de revolução e $\gamma = 8/15$ para um parabolóide de revolução, para uma empenagem com razão de aspecto 3 tem-se

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \mathsf{L}(\alpha)\cdot½ l > \mathsf{N}_o = \rho V \cdot U^2\alpha; \\ \circ\ V = \gamma\cdot\pi r_o^2 l; \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{b}{r_o}\right)^2 > \frac{5\gamma}{2} \begin{cases} = 5/2 & (\textit{cilindro}); \\ = 5/3 & (\textit{elipsóide}); \\ = 4/3 & (\textit{parabolóide}), \end{cases} \quad \left(\mathsf{A} = \frac{2b}{a} = 3\right) \qquad (10)$$

levando à seguinte conclusão: a meia envergadura *b* da empenagem deve ser maior que o máximo raio r_o da fuselagem.

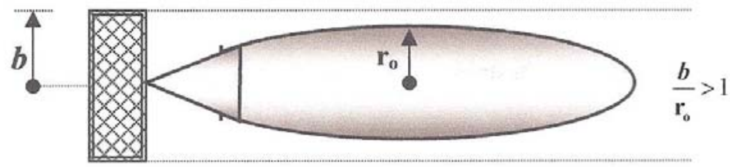

FIG.(8): Vista no plano (x_1; x_3), apresentando a envergadura da empenagem e diâmetro máximo da fuselagem.

Geometricamente, olhando de frente a aeronave conseguimos sempre ver as extremidades da empenagem, como esquematicamente indicado na Fig.(8) e verificado na prática.

5. ESTABILIDADE DE POSIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Retomaremos aqui o estudo da *estabilidade direcional* da aeronave com o intuito de mostrar que ele é caso particular de um problema mais geral, da estabilidade de *posições de equilíbrio* de um sistema dinâmico.

No caso em questão devemos, antes de tudo, reconhecer que posição de equilíbrio é esta cuja estabilidade estamos estudando. Consideremos assim a aeronave acima analisada, sua empenagem tendo uma semi-envergadura *b* de forma que a condição de estabilidade se cumpra: a aeronave encontra-se, nesse caso, em uma *posição de equilíbrio* no sistema inercial que se desloca com $U\mathbf{e}_1$ e é a estabilidade dessa "posição de equilíbrio" que se pretende estudar. Do ponto de vista do projeto, a questão é *dimensionar* a empenagem e por isso suporemos que a geometria da asa – se elíptica, retangular, etc. – esteja definida: a semi-envergadura *b*, que define, juntamente com a razão de aspecto A, as dimensões da empenagem, é assim o parâmetro de controle nesse dimensionamento.

Recordando a equação dinâmica[3],

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \mathsf{N}_o(\alpha) = \rho V \cdot U^2 \alpha; \\ \circ\ \mathsf{L}(\alpha)\cdot \tfrac{1}{2} l = \tfrac{1}{2}\rho U^2 S_e \cdot C_{L,\alpha}\cdot\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow I_{33}\cdot\ddot{\alpha} = \mathsf{N}_o(\alpha) - \mathsf{L}(\alpha)\cdot \tfrac{1}{2} l\,, \qquad (11a)$$

[3] A *equação dinâmica* é fundamental aqui, pois é ela que define o ponto P – o *centro de massa* – em relação ao qual deve-se tomar o momento da força $\mathsf{L}(\alpha)$ devido à empenagem.

o valor crítico b_{cr} da semi-envergadura da empenagem é definido pela *relação estática*

$$b = b_{cr} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{N}_o(\alpha) - \mathsf{L}(\alpha)\cdot ½ l = 0 \tag{11b}$$

que pode ser assim traduzida: o *momento desestabilizador* – o momento de Munk $\mathsf{N}_o(\alpha)$ – deve igualar o *momento estabilizador* $\mathsf{L}(\alpha)\cdot ½ l$ devido à empenagem.

Supondo $C_{L,\alpha} \cong 2\pi/(1+2/\mathsf{A})$, obtém-se

$$b_{cr}^2 = \frac{\gamma r_o^2}{2}\left(\mathsf{A}+2\right), \quad \left(V = \gamma\cdot\pi r_o^2 l;\ \mathsf{A} = \frac{2b}{a}\right) \tag{11c}$$

o valor crítico b_{cr} crescendo com a razão de aspecto A por uma razão simples: a força de sustentação na empenagem é diretamente proporcional à área $S_e = 4b^2/\mathsf{A}$. Colocando (11c) em (11a), a seguinte equação é obtida

$$\begin{aligned} &\circ\ \ddot{\alpha} + \omega_{(\lambda)}^2\left(1-\lambda\right)\alpha = 0; \\ &\circ\ \lambda = \left(\frac{b_{cr}}{b}\right)^2, \end{aligned} \qquad \left(\omega_{(\lambda)}^2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho V\cdot U^2}{I_{33}}\right) \tag{12a}$$

com solução da forma,

$$\varpi = \omega_{(\lambda)}\cdot\left|1-\lambda\right|^{1/2} \Rightarrow \begin{cases} \circ\ \lambda < 1 \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_o\cdot\cos\left(\varpi t\right); \\ \circ\ \lambda > 1 \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_o\cdot\cosh\left(\varpi t\right), \end{cases} \tag{12b}$$

α_o sendo a perturbação inicial. Para $\lambda < 1$ (*regime estável*) a perturbação inicial causa uma *oscilação* da aeronave com amplitude α_o, que lentamente deve ser amortecida por forças dissipativas não contabilizadas neste modelo; para $\lambda > 1$ (*regime instável*) a perturbação inicial cresce exponencialmente com o tempo e não há dissipação linear finita capaz de limitar este crescimento.

De fato, adicionando um termo de amortecimento, a equação dinâmica toma a forma

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta\varpi\cdot\dot{\alpha} \pm \varpi^2\alpha = 0 \quad \textit{com} \quad \begin{cases} \circ\ +\varpi^2\alpha \Leftrightarrow \lambda < 1; \\ \circ\ -\varpi^2\alpha \Leftrightarrow \lambda > 1, \end{cases} \tag{13a}$$

com solução dada por

$$\alpha(t)=\alpha_o\cdot e^{pt}\Leftrightarrow p=-\zeta\varpi\pm\sqrt{\left(\zeta\varpi\right)^2\ \ (\mp)\ \varpi^2}$$

e portanto

$$\begin{aligned}&\circ\ \lambda<1\Rightarrow p\big|_{\zeta<<1}=\pm i\varpi-\zeta\varpi\Rightarrow\alpha(t)=\alpha_o\cdot e^{-\zeta\varpi t}\cdot\cos\varpi t;\\&\circ\ \lambda>1\Rightarrow p\big|_{\zeta>>1}=½\left(\varpi/\zeta\right)\Rightarrow\alpha(t)=\alpha_o\cdot e^{½\left(\varpi/\zeta\right)t},\end{aligned}\tag{13b}$$

indicando o decréscimo exponencial da solução estável, mesmo para um amortecimento muito baixo (ζ << 1), e o crescimento exponencial da solução instável, mesmo para um amortecimento muito grande (ζ >> 1).

Com o objetivo de mostrar que o problema aqui analisado é só um caso particular de uma classe muito mais ampla de problemas, analisaremos, a seguir, um problema fundamental da Resistência dos Materiais.

4.1: Flambagem de Vigas

Quando se segura uma régua de plástico em uma extremidade e se pressiona a outra extremidade, para um dado valor da pressão a régua sai de sua posição reta de equilíbrio e “embarriga”: este é o fenômeno da “flambagem de vigas”, fundamental no projeto de membros estruturais comprimidos, como as colunas de um edifício, por exemplo,

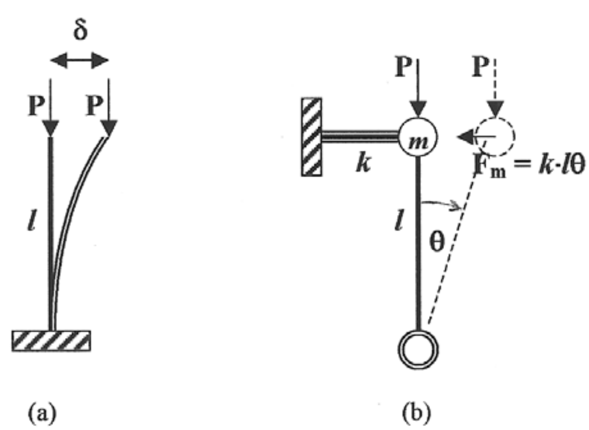

FIG.(10): (a) Flambagem de viga engastada de comprimento *l* e rigidez EJ;
(b) Barra rígida articulada e apoiada lateralmente em mola com $k = 3EJ/l^3$.

A Fig.(10a) representa uma viga, de comprimento *l*, engastada em sua extremidade inferior e sujeita a uma carga compressiva P em sua extremidade superior; se E for o modo de elasticidade do material e J for o (menor) momento de inércia da seção transversal, a *rigidez flexional* da viga é definida pelo produto EJ. Em primeira aproximação, a viga pode ser substituída por uma *barra rígida* de comprimento l, articulada em sua extremidade inferior e apoiada lateralmente em uma *mola* com rigidez k, emulando a rigidez flexional, ver Fig.(10b). O valor de k pode ser estimado obrigando que o deslocamento lateral δ da mola sob ação de uma carga lateral Q seja o mesmo da viga, dado por $\delta = Ql^3/3EJ$, de acordo com o esquema apresentado na Fig.(11); portanto $k = 3EJ/l^3$.

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \delta = \dfrac{Ql^3}{3EJ}; \\ \circ\ k = \dfrac{3EJ}{l^3} \end{array}\right\} \Rightarrow Q = k \cdot \delta$$

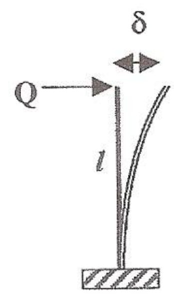

FIG.(11): Equivalência entre rigidez flexional da viga
e a constante de mola k do modelo.

No projeto da viga, a carga P é dada e o parâmetro de controle é a rigidez EJ da viga ou a constante de mola k no modelo simplificado. A *posição trivial de equilíbrio* cuja estabilidade pretende-se estudar corresponde à *barra rígida* na posição vertical e a análise da estabilidade começa por admitir uma perturbação “infinitesimal” θ, como indicado na Fig.(10b); dois momentos em relação à articulação surgem então: um *estabilizador*, relacionado ao momento $(k \cdot l\theta)\cdot l$ oriundo da *“rigidez flexional”*; outro *desestabilizador*, relacionado ao momento $P \cdot l\theta$. Se $k \cdot l > P$, a barra retorna à posição vertical e a posição trivial é estável; se $k \cdot l < P$, a barra se afasta da posição vertical e a posição trivial é instável: a estabilidade exige, portanto, que $k > k_{cr} = 3(EJ)_{cr}/l^3 = P/l$ (ou $EJ > Pl^2/3$), um resultado semelhante ao do problema da empenagem, onde $b > b_{cr}$.

No projeto de uma coluna, portanto, dada a carga vertical P e o comprimento l, as dimensões da seção transversal têm que ser escolhidas de tal forma que $EJ > Pl^2/3$; caso contrário, a coluna embarriga e, em geral, se rompe. É usual, no entanto, apresentar este resultado de uma forma diferente: a rigidez é dada (a coluna é dada) e o problema é determinar a *carga de flambagem* P_{cr}, o valor acima do qual a posição trivial deixa de ser estável. Assim

$$P_{cr} = k \cdot l = \frac{3EJ}{l^2}, \qquad (14a)$$

um valor $12/\pi^2$ vezes maior que o valor exato para a viga da Fig.(10a).

O problema de estabilidade aqui tratado pode (e deve) ser analisado dinamicamente. Supondo uma massa *m* na extremidade superior, das expressões da energia cinética T e potencial U segue

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ \mathsf{T}(\dot\theta)=\tfrac{1}{2}\ m\left(l\dot\theta\right)^2;\\ \circ\ \mathsf{U}(\theta)=\tfrac{1}{2}\ k\left(l\theta\right)^2-\tfrac{1}{2}\ \mathrm{P}l\theta^2;\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial\mathsf{T}}{\partial\dot\theta}\right)=-\frac{\partial\mathsf{U}}{\partial\theta}\Rightarrow ml^2\ddot\theta=\mathrm{P}\cdot l\theta-kl\theta\cdot l$$

e portanto

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ \mathrm{P}_{\mathrm{cr}}=k\cdot l=\dfrac{3\mathrm{EJ}}{l^2};\\ \circ\ \lambda=\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_{\mathrm{cr}}};\end{array}\right\}\Rightarrow\ddot\theta+\omega^2\left(1-\lambda\right)\cdot\theta=0,\qquad\left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}};\quad\mathrm{P}_{\mathrm{cr}}=\frac{12}{\pi^2}\left(\mathrm{P}_{\mathrm{cr}}\right)_{exato}\right)\quad(14\mathrm{b})$$

com solução da forma (ver (12b))

$$\varpi=\omega\cdot\left|1-\lambda\right|^{1/2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\circ\ \lambda<1\Rightarrow\theta(\mathrm{t})=\theta_{\mathrm{o}}\cdot\cos\left(\varpi\mathrm{t}\right);\\ \circ\ \lambda>1\Rightarrow\theta(\mathrm{t})=\theta_{\mathrm{o}}\cdot\cosh\left(\varpi\mathrm{t}\right),\end{array}\right.\qquad(14\mathrm{c})$$

θ_o sendo a perturbação inicial. Concluindo, o critério de estabilidade pode, no caso, ser obtido diretamente a partir da *segunda derivada* da energia potencial U(θ) pois

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ \mathsf{U}(\theta)=\tfrac{1}{2}\ \left(1-\lambda\right)l\theta^2;\\ \circ\ \mathsf{U}''(\theta)=\left(1-\lambda\right)l;\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\circ\ \mathsf{U}''(0)>0\Leftrightarrow\lambda<1:(\textit{estável});\\ \circ\ \mathsf{U}''(0)<0\Leftrightarrow\lambda>1:(\textit{instável}),\end{array}\right.\qquad(14\mathrm{d})$$

a imagem de uma partícula nos pontos de *mínimo* e *máximo* da função potencial tendo um apelo direto, em analogia com os vales e picos do campo gravitacional. Em sistemas *não-conservativos*, no entanto, não só as forças não podem ser mais representadas pelos gradientes de um campo potencial como, em geral, o *critério estático*, utilizado para derivar (14a), perde o sentido: no caso geral, a *estabilidade* de uma posição de equilíbrio deve ser estudada a partir das *equações dinâmicas* que regem o movimento das *pequenas perturbações* no entorno da posição de equilíbrio.

* * *