



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

---

Departamento de Engenharia Mecânica

## **PME 2200 - Mecânica Geral B**

### **Introdução à Mecânica Analítica** ***Notas de Aula***

**Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins**

**2006**

## ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. GRAUS DE LIBERDADE	1
3. COORDENADAS GENERALIZADAS	2
4. VÍNCULOS HOLÔNOMOS	3
5. DESLOCAMENTOS VIRTUAIS	4
6. TRABALHO VIRTUAL	5
7. FORÇAS VINCULARES	5
8. O PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL	8
9. O PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT	11
10. FORÇAS GENERALIZADAS	11
11. EQUAÇÕES DE LAGRANGE	14
12. FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE RAYLEIGH	27
13. PEQUENAS OSCILAÇÕES	31
14. BIBLIOGRAFIA	36

## 1. INTRODUÇÃO

As leis da mecânica foram formuladas por Newton para uma partícula isolada, mas podem ser estendidas para um sistema de partículas considerando as forças vinculares, que resultam das relações cinemáticas que restringem os movimentos das partículas. Uma das abordagens usadas para montar as equações do movimento, que é chamada de *mecânica vetorial*, é baseada diretamente nas leis de Newton e trabalha com grandezas vetoriais, como força e quantidade de movimento. Este caminho considera separadamente as forças atuando em cada partícula e necessita do cálculo das forças vinculares, embora tais forças possam não ser de interesse.

Uma outra abordagem, que é o objeto principal destas notas de aula, é atribuída a Leibnitz e Lagrange e é chamada de *mecânica analítica*. Esta abordagem considera o sistema como um todo, formulando o problema da mecânica a partir de duas quantidades escalares fundamentais: a energia cinética e a energia potencial. As restrições cinemáticas do movimento são levadas em conta, sem que seja necessário o cálculo das forças que as mantêm. A introdução de coordenadas generalizadas no lugar das coordenadas físicas torna a formulação mais versátil e as equações do movimento são obtidas de uma forma padronizada, independente do particular sistema de coordenadas utilizado.

## 2. GRAUS DE LIBERDADE

A posição ocupada no espaço por uma partícula em movimento é perfeitamente descrita pelo terno de coordenadas cartesianas  $(x,y,z)$ . Se o seu movimento é livre, as três coordenadas são funções independentes, pois a partícula pode ocupar qualquer ponto do espaço. Diz-se, nesse caso, que a partícula possui três *graus de liberdade*, cada um correspondendo a uma das coordenadas independentes.

Considere, agora, o caso de uma partícula que é obrigada a se mover sobre uma esfera de centro  $(x_0,y_0,z_0)$  e raio  $R$ . Nesse caso as coordenadas da partícula não são mais independentes, pois estão vinculadas pela condição

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Se, em vez de coordenadas cartesianas, for usado um sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , a posição da partícula está perfeitamente descrita pelo par de coordenadas independentes  $(\theta, \phi)$ , pois a condição de que o movimento esteja confinado à superfície da esfera obriga que  $r=R$  e, portanto,  $r$  não é uma variável. Diz, nesse caso, que a partícula possui dois graus de liberdade.

O número de graus de liberdade de um sistema de partículas é o número de coordenadas usadas para descrever a sua configuração menos o número de condições independentes de vínculo. Se a posição de um sistema é descrita usando um conjunto de  $n$  coordenadas e há

$m$  equações independentes vinculando essas coordenadas, então o sistema possui  $n-m$  graus de liberdade.

Freqüentemente é possível achar um conjunto de coordenadas *independentes* que descreve a configuração de um sistema, podendo variar livremente sem violar os vínculos, como no caso das coordenadas  $(\theta, \phi)$  para a partícula movendo-se sobre a esfera. Nesse caso o número de graus de liberdade é igual ao número de coordenadas.

É importante mencionar que o número de graus de liberdade é uma característica do sistema e não depende de um particular conjunto de coordenadas adotado para descrever sua configuração. Em outras palavras, enquanto a escolha das coordenadas influencia o  $n$  e  $m$ , a diferença  $(n-m)$  é fixa para um dado sistema.

### 3. COORDENADAS GENERALIZADAS

A configuração de um sistema formado por  $N$  partículas pode ser expressa pelas coordenadas cartesianas de cada uma delas. A posição do sistema, em cada instante, está perfeitamente determinada por um conjunto de  $3N$  números  $(x_i, y_i, z_i)$ . Por outro lado, se forem utilizadas coordenadas esféricas, será necessário conhecer um outro conjunto de  $3N$  números  $(r_i, \theta_i, \phi_i)$ , no mesmo instante. Conhecidas as coordenadas esféricas de um ponto, as suas coordenadas cartesianas são obtidas pela *transformação de coordenadas*:

$$x_i = r_i \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_i$$

$$y_i = r_i \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \phi_i$$

$$z_i = r_i \cos \theta_i$$

Além desses dois conjuntos, existe um número infinito de outros que podem ser usados para representar a configuração do sistema. Alguns desses conjuntos podem não ter um significado geométrico aparente, mas, como representam a posição do sistema, podem ser considerados como coordenadas em um sentido mais amplo. Qualquer conjunto de números que é utilizado para representar a posição de um sistema é um conjunto de *coordenadas generalizadas*.

Em muitos casos, a análise de um sistema mecânico fica bastante simplificada pela escolha adequada de um conjunto de *coordenadas generalizadas* independentes. Nesse caso, o número de coordenadas generalizadas é igual ao número de graus de liberdade e, portanto, não existem equações vinculares.

As equações de transformação de um conjunto de  $k$  coordenadas ordinárias  $x_i$  para um conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas  $q_j$  têm a forma geral

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\
x_2 &= f_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
x_k &= f_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)
\end{aligned} \tag{1}$$

Associado a cada conjunto de coordenadas pode existir um conjunto de equações de vínculo. Se essas equações são independentes, o seu número é igual à diferença entre o número de coordenadas usadas para descrever o sistema e o seu número de graus de liberdade. Assim, se há  $l$  equações de vínculo relacionando as coordenadas ordinárias  $x_j$  e  $m$  equações de vínculo relacionando as coordenadas generalizadas  $q_j$ , então, como o número de graus de liberdade é uma característica do sistema,

$$k - l = n - m \tag{2}$$

#### 4. VÍNCULOS HOLÔNOMOS

Considere um sistema cuja configuração é descrita por  $n$  coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  e suponha que existem  $m$  equações vinculares na forma

$$\phi_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \tag{3}$$

Vínculos deste tipo são conhecidos como vínculos *holônomos*. Como este sistema possui  $(n-m)$  graus de liberdade, existem apenas  $(n-m)$  coordenadas independentes. As relações (3) podem ser usadas para expressar  $m$  das coordenadas como função das outras  $(n-m)$  e, assim, eliminá-las do conjunto de coordenadas generalizadas, resultando, dessa forma,  $(n-m)$  coordenadas generalizadas independentes, que podem ser alteradas arbitrariamente sem violar as condições de vínculo<sup>1</sup>.

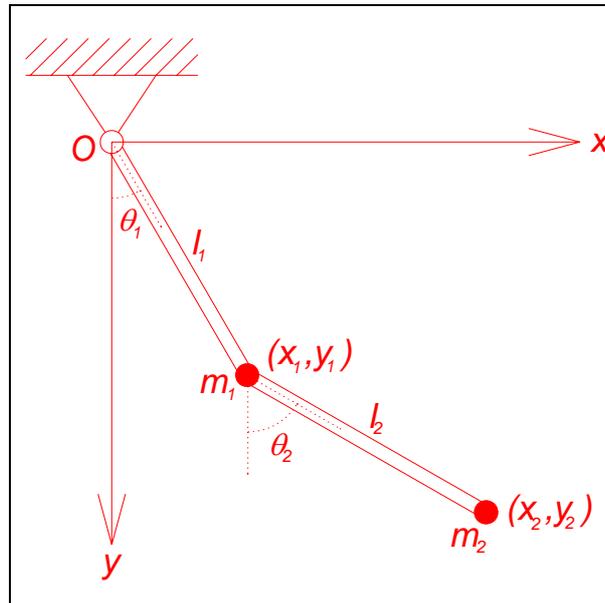
Como exemplo de vínculos holônomos, considere o pêndulo duplo da figura 1. As hastes de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$  são consideradas rígidas e sem massa. O sistema é articulado em  $m_1$  e em  $O$ , de maneira que o movimento é confinado a um plano vertical. Se forem escolhidas as coordenadas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  para representar, respectivamente, as posições das massas  $m_1$  e  $m_2$ , então as equações de vínculo têm a forma

$$\begin{aligned}
x_1^2 + y_1^2 &= l_1^2 \\
(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l_2^2
\end{aligned} ,$$

---

<sup>1</sup> Este procedimento nem sempre é possível ou desejável. Nesse caso pode ser usado o método dos *Multiplicadores de Lagrange*, que não será objeto deste curso.

que expressa o fato de que os comprimentos das hastes são constantes. Note que esses particulares vínculos holônomo não dependem explicitamente do tempo



**Figura 1 - Um pêndulo duplo**

Neste exemplo do pêndulo duplo, foram usadas quatro coordenadas para representar a configuração do sistema que tem apenas dois graus de liberdade. Mas como os vínculos são holônomo em sua natureza, é possível achar um conjunto de coordenadas generalizadas independentes tais que sejam de mesmo número que os graus de liberdade. Por exemplo, os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , que representam os ângulos que as hastes formam com a vertical, poderiam ter sido escolhidos como coordenadas generalizadas. Outras escolhas poderiam ter sido feitas, como definir  $\theta_2$  como o ângulo que a haste  $l_2$  forma com a haste  $l_1$ .

Os vínculos *não-holônomo* não podem ser expressos por expressões com a forma (3), pois são expressos por relações de diferenciais das coordenadas e do tempo que não podem ser integradas. Vínculos deste tipo não serão estudados no presente curso.

## 5. DESLOCAMENTOS VIRTUAIS

Um *deslocamento virtual* de um sistema é uma mudança na sua configuração que resulta de uma variação arbitrária das suas coordenadas, consistente com os seus vínculos, em um dado instante  $t$ . Um deslocamento virtual se processa de maneira instantânea, mantendo as forças aplicadas e as condições de vínculo constantes.

Para representar um deslocamento virtual usa-se uma notação devida a Lagrange. De acordo com esta notação, um deslocamento virtual é representado pelo símbolo  $\delta$  colocado

à frente da coordenada correspondente. Por exemplo, para um sistema de  $N$  partículas, cuja configuração é expressa pelas coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ , um conjunto de deslocamentos virtuais será indicado por  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3N}$ .

## 6. TRABALHO VIRTUAL

Considere um sistema de  $N$  partículas, cuja configuração é especificada em termos das coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ . Suponha que as forças  $F_1, F_2, \dots, F_{3N}$  estão aplicadas na direção crescente da coordenada correspondente. Imagine, agora, que, em um dado instante, são aplicados ao sistema os deslocamentos virtuais  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{3N}$ . O trabalho realizado durante os deslocamentos virtuais pelas forças aplicadas é conhecido como *trabalho virtual* e é dado por

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \delta x_j \quad . \quad (4)$$

Se  $\mathbf{F}_i$  é a força aplicada à partícula  $i$  cujo vetor de posição é  $\mathbf{r}_i$ , o trabalho virtual das forças aplicadas pode ser escrito, também, na forma:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad . \quad (5)$$

## 7. FORÇAS VINCULARES

Se um sistema está sujeito a vínculos, forças vinculares devem ser aplicadas às suas partículas para garantir que as condições de vínculo sejam respeitadas. Para uma ampla classe de problemas, o trabalho virtual realizado pelas forças vinculares é nulo.

Considere, por exemplo, duas partículas conectadas por uma haste rígida sem massa, como está esquematizado na figura 2. Pelo princípio da ação e reação, as forças transmitidas pela haste às partículas devem ser iguais, opostas e colineares. Se  $\mathbf{R}_1$  é a força vincular em  $m_1$  e  $\mathbf{R}_2$  é a força vincular em  $m_2$ , então

$$\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2 = -R_2 \mathbf{e}_r \quad , \quad (6)$$

onde  $\mathbf{e}_r$  é o vetor unitário direcionado de  $m_1$  para  $m_2$ . Na aplicação dos deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{r}_1$  e  $\delta \mathbf{r}_2$ , o trabalho virtual realizado pelas forças vinculares, na forma da equação (5) é

$$\delta W = \mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 \quad . \quad (7)$$

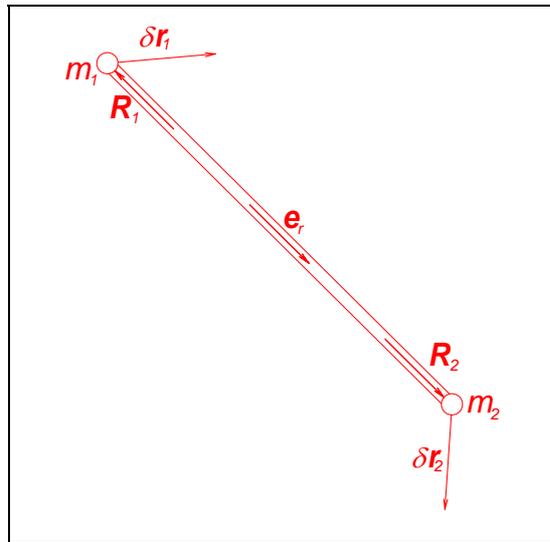
Mas as componentes do deslocamento na direção da haste devem ser iguais, para que ela não se deforme, resultando na condição de vínculo:

$$\mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{r}_2 \quad (8)$$

Então, das equações (6), (7) e (8), conclui-se que

$$\delta W = (R_2 - R_1) \mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0$$

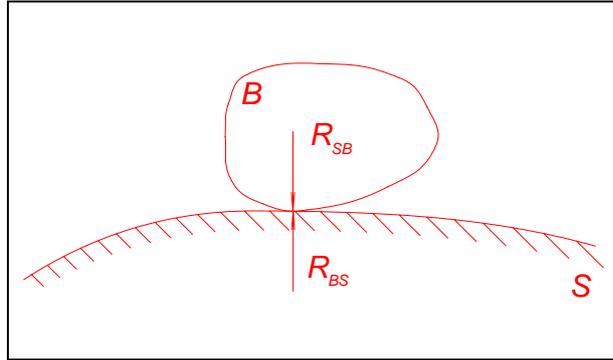
indicando que o trabalho virtual das forças vinculares é nulo.



**Figura 2 - Duas partículas conectadas por haste rígida sem massa**

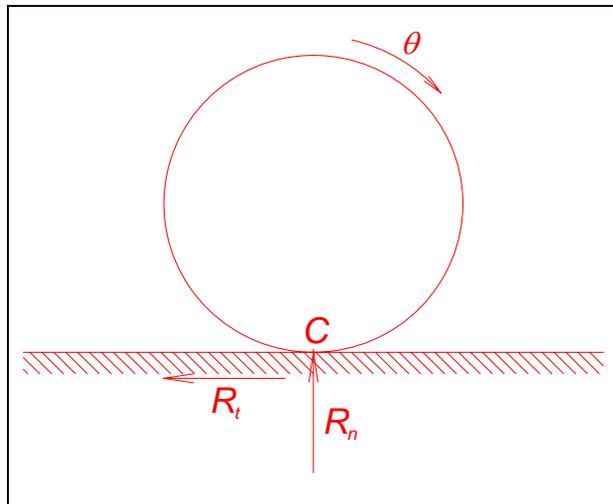
O exemplo da haste pode ser estendido para o caso de um corpo rígido que pode ser considerado como formado por um grande número de partículas rigidamente interligadas. Assim, o trabalho virtual realizado pelas forças vinculares agindo entre duas partículas é nulo e a soma de todas as combinações de pares de partículas permite concluir que o trabalho virtual total das forças vinculares internas é nulo.

Um outro exemplo que pode ser discutido é o caso de um corpo  $B$  que escorrega sem atrito sobre uma superfície fixa  $S$  conforme está esquematizado na figura 3. Como não há atrito, a força de contato  $\mathbf{R}_{BS}$  é normal à superfície. Nenhum trabalho virtual pode ser executado na superfície  $S$  porque as suas partículas não podem se mover. Qualquer deslocamento virtual do ponto de aplicação de  $\mathbf{R}_{BS}$  deve ser tangente a  $S$ . Segue da equação (5), que o trabalho virtual das forças vinculares é novamente nulo. Note que o trabalho virtual seria nulo mesmo que a superfície se movesse de acordo com uma função explícita do tempo, já que o tempo permanece congelado durante um deslocamento virtual e, portanto, a superfície é considerada fixa no instante em que se processa esse deslocamento virtual.



**Figura 3 - Corpo escorregando sem atrito sobre uma superfície fixa**

Um último exemplo é o de um disco que rola sem escorregar sobre uma superfície fixa em movimento plano, conforme a figura 4. Novamente, as forças que atuam na superfície fixa não podem realizar trabalho. A força que a superfície aplica no disco é composta por uma componente de atrito  $R_t$  agindo tangencialmente à superfície e uma componente normal  $R_n$ . Como não há escorregamento, a partícula do disco que se encontra instantaneamente em  $C$  está em repouso quando a força vicular é aplicada sobre ela e, portanto, não há deslocamento do ponto de aplicação dessa força. Assim, o trabalho virtual das forças viculares é aqui também nulo. Mais ainda: embora tenha sido discutido o caso particular de um disco rolando no plano, um argumento similar aplica-se aos outros casos de contato rolante de um corpo sobre uma superfície fixa.



**Figura 4 - Disco rolando sem escorregar em movimento plano**

Os exemplos que foram apresentados ilustram o fato de que, para vários tipos de vínculos que comumente ocorrem, o trabalho virtual realizado pelas forças viculares é nulo. Apenas este tipo de vínculo será considerado na seqüência deste curso.

## 8. O PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

Um sistema está em *equilíbrio estático* em relação a um referencial inercial se todas as suas partículas estão em repouso em relação a esse referencial e se a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre cada uma das partículas é nula. A força total que atua sobre uma partícula  $m_i$  pode ser separada em uma *força vincular*  $\mathbf{R}_i$  e uma *força aplicada*  $\mathbf{F}_i$ . Se o sistema de  $N$  partículas está em equilíbrio, então para cada partícula:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad . \quad (9)$$

Portanto, o trabalho virtual de todas as forças, que resulta de um deslocamento virtual  $\delta \mathbf{r}_i$  é

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad . \quad (10)$$

Se as forças vinculares não realizam trabalho, conforme foi discutido no item anterior, então

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (11)$$

Das equações (10) e (11), conclui-se que

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad , \quad (12)$$

ou seja, que se um sistema de partículas cujas forças vinculares não realizam trabalho está em equilíbrio, então o trabalho virtual das *forças aplicadas* é nulo, para quaisquer deslocamentos virtuais.

Considere, agora, um sistema de partículas com vínculos que não realizam trabalho que está inicialmente em repouso, *porém não está em equilíbrio*. Então uma ou mais de suas partículas possui uma força não nula aplicada sobre ela e, de acordo com a segunda lei de Newton, tende a se mover na direção dessa força. Como qualquer movimento deve ser compatível com os vínculos sempre se pode achar um deslocamento virtual na direção da força em cada ponto. Nesse caso, o trabalho virtual é positivo, ou seja,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0 \quad . \quad (13)$$

Mas, mais uma vez, as forças vinculares não realizam trabalho e a equação (11) se aplica. Então, para esse sistema, o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas nesses deslocamentos virtuais é positivo, isto é,

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0 \quad . \quad (14)$$

Em outras palavras, se o dado sistema não está em equilíbrio, sempre será possível achar um conjunto de deslocamentos virtuais, para os quais o trabalho virtual das forças aplicadas é positivo.

Este resultado pode ser sintetizado no *Princípio do Trabalho Virtual*:

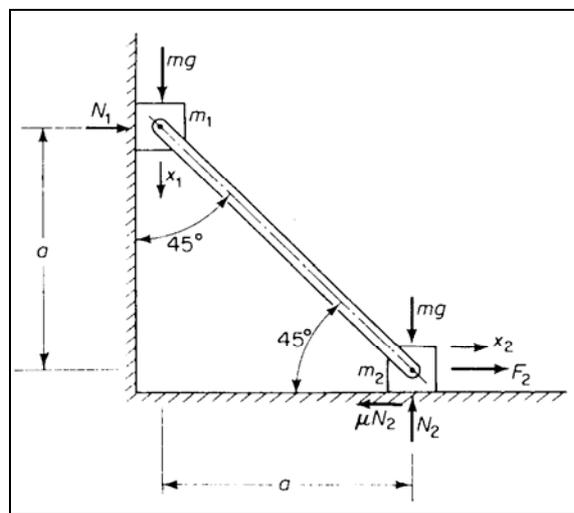
*A condição necessária e suficiente para o equilíbrio estático de um sistema inicialmente em repouso cujas forças vinculadas não realizam trabalho é que seja nulo o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas durante deslocamentos virtuais arbitrários.*

O Princípio do Trabalho Virtual é de importância fundamental no estudo da estática e, se é utilizado o Princípio de d'Alembert, pode ser estendido para sistemas dinâmicos. Fornecendo um critério relativamente simples para o equilíbrio de uma classe grande e importante de sistemas e evitando a necessidade de calcular forças vinculadas em muitos casos, ele simplifica a análise de uma variedade ampla de problemas em Mecânica.

### Exemplo

Duas massas iguais são conectadas por uma barra rígida sem massa, conforme o esquema da figura 5.

- Considerando que não há atrito em nenhum dos contatos, calcule a força  $F_2$  necessária para manter o equilíbrio estático do sistema.
- Para o caso em que  $F_2=0$ , qual é o mínimo coeficiente de atrito  $\mu$  que deve haver no contato entre  $m_2$  e o solo, para não haver escorregamento?



**Figura 5 - Um sistema que se move no plano**

### Solução

(a) Sendo  $x_1$  e  $x_2$  os deslocamentos das massas medidos a partir da configuração inicial do sistema, como o comprimento da barra não se altera, eles estão ligados pela condição de vínculo:

$$(a - x_1)^2 + (a + x_2)^2 = 2a^2 \quad ,$$

cuja forma diferencial é

$$-(a - x_1)dx_1 + (a + x_2)dx_2 = 0$$

e, portanto, na configuração inicial

$$dx_1 = dx_2 \quad . \quad (15)$$

As forças aplicadas ao sistema são a força  $F_2$ , os pesos e as forças normais nos contatos. O peso de  $m_2$  atua em uma direção perpendicular ao deslocamento virtual  $\delta x_2$  e, portanto, não realiza trabalho em um deslocamento virtual. As forças normais são perpendiculares aos deslocamentos virtuais correspondentes e, portanto, também não realizam trabalho.

A aplicação do princípio do trabalho virtual resulta na condição para que o sistema esteja em equilíbrio

$$mg\delta x_1 + F_2\delta x_2 = 0 \quad .$$

Mas como todo deslocamento virtual deve ser consistente com a equação de vínculo (15), então

$$\delta x_1 = \delta x_2 \quad (16)$$

e, portanto,

$$F_2 = -mg \quad .$$

(b) Para calcular a força de atrito no contato de  $m_2$  com o solo é necessário calcular, em primeiro lugar, a força normal  $N_2$ , que é obtida diretamente do equilíbrio do sistema na direção vertical:

$$N_2 = 2mg \quad .$$

Então, usando a lei de Coulomb, a força de atrito na iminência do escorregamento será

$$\mu N_2 = \mu 2mg \quad .$$

Aplicando, novamente, o princípio do trabalho virtual, considerando a força de atrito como uma força aplicada, resulta a condição para equilíbrio estático do sistema:

$$mg\delta x_1 - \mu 2mg\delta x_2 = 0 \quad .$$

Mais uma vez a condição de vínculo (16) deve ser satisfeita e, portanto, o mínimo coeficiente de atrito, correspondente à situação em que o escorregamento é iminente é

$$\mu = \frac{1}{2} \quad .$$

## 9. O PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

Em um referencial inercial, se uma partícula de massa  $m$  é submetida a uma força  $\mathbf{F}$ , ela adquire uma aceleração absoluta  $\mathbf{a}$  que é dada pela segunda lei de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad . \quad (17)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (18)$$

onde o termo  $-m\mathbf{a}$  pode ser considerado como uma força adicional aplicada sobre a partícula, uma força *de inércia*. Portanto, o resultado dado pela equação (18) pode ser interpretado como dizendo que a soma das forças é nula, da mesma maneira que no equilíbrio estático. Este é o Princípio de d'Alembert na sua forma mais simples, que permite que se usem os métodos da estática para obter as equações do movimento.

Uma forma mais geral do Princípio de d'Alembert usa um outro critério para equilíbrio estático, ou seja, o Princípio do Trabalho Virtual, para obter as equações de equilíbrio do sistema. Considere, com essa finalidade, um sistema de  $N$  partículas de massa  $m_i$ , submetidas às forças aplicadas  $\mathbf{F}_i$ . A quantidade de movimento da partícula  $i$  é

$$\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i \quad (19)$$

e a força de inércia  $-\dot{\mathbf{p}}_i$  pode ser adicionada à força aplicada  $\mathbf{F}_i$  na expressão (12) para obter o novo enunciado do Princípio de d'Alembert:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad . \quad (20)$$

## 10. FORÇAS GENERALIZADAS

Considere um sistema de partículas cujas posições são especificadas pelas coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Se as forças  $F_1, F_2, \dots, F_k$  são aplicadas às coordenadas correspondentes e elas atuam na direção positiva em cada caso, então o trabalho virtual dessas forças em um deslocamento virtual arbitrário é

$$\delta W = \sum_{j=1}^k F_j \delta x_j \quad (21)$$

em concordância com a equação (4).

Suponha, agora, que as coordenadas ordinárias  $x_1, x_2, \dots, x_k$  estão relacionadas com as coordenadas generalizadas na forma da equação (1). Então, pode-se expressar os deslocamentos virtuais dos  $x_j$  em termos dos deslocamentos virtuais correspondentes aos  $q_i$ . Diferenciando a equação (1)

$$dx_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt \quad (j=1,2,\dots,k) \quad , \quad (22)$$

substituindo os diferenciais  $d$  pelos correspondentes deslocamentos virtuais  $\delta$  e lembrando que  $\delta t=0$ , pois os deslocamentos virtuais se processam instantaneamente, obtém-se

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad (j=1,2,\dots,k) \quad (23)$$

onde os coeficientes  $\partial x_j / \partial q_i$  são funções dos  $q_i$  e do tempo. Substituindo esta expressão em (21), chega-se a

$$\delta W = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad . \quad (24)$$

Trocando a ordem dos somatórios, a equação (24) pode ser colocada na forma

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (25)$$

onde aparece a *força generalizada*  $Q_i$  associada à coordenada generalizada  $q_i$  que é definida por

$$Q_i = \sum_{j=1}^k F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad . \quad (26)$$

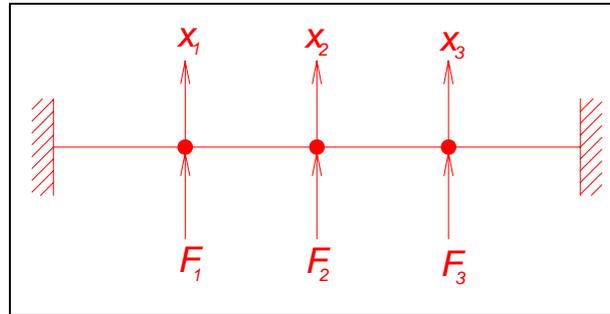
Note que as expressões para o trabalho virtual dadas pelas equações (21) e (25) têm a mesma forma matemática.

A dimensão de uma força generalizada depende da dimensão da coordenada generalizada correspondente, mas o produto  $Q_i \delta q_i$  deve ter sempre a dimensão de trabalho  $[FL]$ . Assim, se  $q_i$  corresponder a um deslocamento linear, a força generalizada terá a dimensão de força e se  $q_i$  for um ângulo, então  $Q_i$  será um momento. As coordenadas cartesianas  $x_j$  são um caso especial de coordenadas generalizadas. Da mesma maneira uma força ordinária  $F_j$  é um caso especial de força generalizada. Todos os resultados que se aplicam a forças e deslocamentos generalizados são válidos também para forças e deslocamentos ordinários.

Como exemplo do cálculo de forças generalizadas, considere o sistema da figura 6. As partículas estão conectadas por uma corda elástica e são vinculadas de maneira que apenas movimentos transversais em um único plano sejam permitidos. As coordenadas ordinárias  $x_1, x_2, x_3$  designam os deslocamentos transversais das partículas. Nenhum vínculo adicional é considerado, de maneira que o sistema tem três graus de liberdade.

Suponha que as três coordenadas generalizadas independentes  $q_1, q_2, q_3$  sejam usadas para descrever o mesmo sistema. De acordo com a equação (1) as equações de transformação que relacionam os dois conjuntos de coordenadas podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{3}{4}q_1 + q_2 + \frac{1}{2}q_3 \\
 x_2 &= q_1 - q_3 \\
 x_3 &= \frac{3}{4}q_1 - q_2 + \frac{1}{2}q_3
 \end{aligned}
 \tag{27}$$



**Figura 6 - Coordenadas e forças associadas aos movimentos planos transversais de uma corda elástica carregada**

Note que os coeficientes em (27) podem ser escolhidos de forma arbitrária, garantindo apenas que os  $q_i$  sejam independentes. As forças generalizadas são calculadas diretamente aplicando as relações de transformação (27) na definição (26):

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{3}{4}F_1 + F_2 + \frac{3}{4}F_3 \\
 Q_2 &= F_1 - F_3 \\
 Q_3 &= \frac{1}{2}F_1 - F_2 + \frac{1}{2}F_3
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

O significado geométrico de cada coordenada generalizada pode ser observado fazendo com que ela varie separadamente das outras. Por exemplo, se apenas  $q_1$  é liberada para variar, verifica-se a partir da equação (27) que as coordenadas ordinárias assumem valores de acordo com a relação

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{3}{4} : 1 : \frac{3}{4}$$

Um procedimento similar pode ser usado para obter as relações correspondentes a  $q_2$  e  $q_3$ . Então cada coordenada generalizada pode ser associada a uma forma de deflexão particular como pode ser visto na figura 7 para este exemplo. A superposição dessas formas de deflexão multiplicadas pelos valores das coordenadas generalizadas correspondentes torna possível que qualquer configuração possa ser descrita. Coordenadas generalizadas desse tipo encontram uma aplicação ampla no estudo dos problemas de vibrações lineares de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

O conceito de forças generalizadas pode ser usado para expressar as condições requeridas para o equilíbrio estático. Para verificar isto, note da equação (25) que, se  $\delta W=0$  para um

deslocamento virtual arbitrário de  $q_i$  independentes, então todas as forças generalizadas devem ser nulas. Portanto, pode-se usar o Princípio do Trabalho Virtual para mostrar que a condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um sistema inicialmente em repouso é que todas as forças generalizadas correspondentes às coordenadas generalizadas sejam nulas. Forças vinculares não entram diretamente neste caso porque foi assumido que os  $q_i$  são independentes e, portanto, não vinculados.

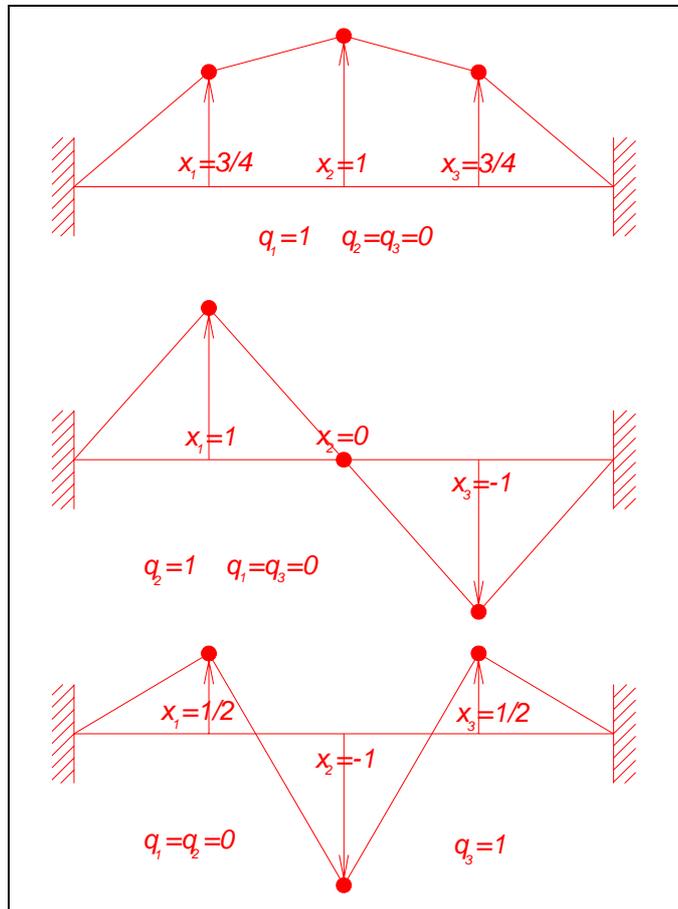


Figura 7 - Formas de deflexão correspondentes às coordenadas generalizadas

## 11. EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Considere um sistema com  $N$  partículas cujas posições são especificadas pelas coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ , onde  $(x_1, x_2, x_3)$  são as coordenadas da primeira partícula,  $(x_4, x_5, x_6)$  as da segunda e assim por diante. A energia cinética total desse sistema é

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 \quad (29)$$

Considere, agora, que a configuração desse mesmo sistema seja representada por um conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas independentes. As coordenadas ordinárias e as coordenadas generalizadas estão relacionadas pelas equações de transformação (1), cuja derivação em função do tempo permite concluir que

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad . \quad (30)$$

Cada conjunto de coordenadas permite o mesmo número de graus de liberdade, que é uma característica do sistema de partículas, embora as  $x_j$  tenham vínculos a elas associados. A expressão (30) permite verificar que as velocidades ordinárias  $\dot{x}_j$  são, no caso geral, funções das coordenadas generalizadas  $q_i$ , das velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ , e do tempo, isto é,

$$\dot{x}_j = g_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad . \quad (31)$$

Substituindo a equações (30) na expressão da energia cinética (29), verifica-se que ela pode ser colocada na forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right)^2 \quad (32)$$

onde as derivadas parciais  $\partial x_j / \partial q_i$  e  $\partial x_j / \partial t$  são funções das coordenadas generalizadas  $q_i$  e do tempo. Verifica-se, então, que a energia cinética é uma função das coordenadas generalizadas  $q_i$ , das velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  e do tempo.

A *quantidade de movimento generalizada*  $p_i$  associada à coordenada generalizada  $q_i$  é definida pela equação

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad . \quad (33)$$

Note que  $p_i$  é uma quantidade escalar. Para o caso de sistema de coordenadas relativamente simples,  $p_i$  é justamente a componente do vetor quantidade de movimento na direção da coordenada  $q_i$ . Como exemplo, considere uma partícula cuja posição é expressa por coordenadas cartesianas. Sua energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad .$$

A quantidade de movimento associada à coordenada  $x$  é

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

que é a componente da quantidade de movimento na direção do eixo  $x$ .

Similarmente, para o caso em que a posição da partícula é expressa em termos de coordenadas esféricas, a energia cinética pode ser escrita na forma:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

e, portanto,

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

que é a componente radial da quantidade de movimento. Considere, agora,

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

Esta expressão pode ser reconhecida com a componente vertical ( $\phi$ ) do momento angular. Aqui o momento angular aparece no lugar da quantidade de movimento. Isto ocorre porque a coordenada  $\phi$  representa deslocamentos angulares.

No caso de um sistema de coordenadas não ortogonais, verifica-se que  $p_i$  nem sempre é uma *componente* da quantidade de movimento na forma convencional, mas é *projecção* da quantidade de movimento no eixo  $q_i$ . Para conjuntos de coordenadas mais gerais,  $p_i$  nem sempre têm um significado físico que possa ser facilmente expresso.

Retornando, agora, ao sistema com  $N$  partículas, as equações (29) e (33) permitem verificar que

$$p_i = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \quad . \quad (34)$$

Mas, como as coordenadas generalizadas são independentes e as relações de transformação (1) independem das velocidades, da equação (30) obtém-se

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (35)$$

e, portanto, a expressão (34) se transforma em

$$p_i = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad . \quad (36)$$

Esta última equação pode ser derivada em relação ao tempo para se obter a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento generalizada:

$$\frac{d p_i}{d t} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{d t} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)$$

Mas, como as derivadas  $\partial x_j / \partial q_i$  são função das coordenadas generalizadas e do tempo, então

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t}$$

e, portanto,

$$\frac{d p_i}{d t} = \sum_{j=1}^{3N} \left( m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \dot{x}_j \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + m_j \dot{x}_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} \right) \quad . \quad (37)$$

Supondo que a massa  $m_j$  de cada partícula seja constante, obtém-se da equação (29),

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \quad . \quad (38)$$

A derivada  $\partial \dot{x}_j / \partial q_i$  pode ser obtida derivando a equação (30) em relação a  $q_i$  tomando-se a precaução de trocar o índice do somatório de  $i$  para  $k$ .

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} \quad . \quad (39)$$

Esta expressão pode ser aplicada em (38) para se obter

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} \right) \quad . \quad (40)$$

Comparando as equações (37) e (40), conclui-se que

$$\frac{d p_i}{d t} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad . \quad (41)$$

Considere, agora, as forças que agem sobre uma partícula típica do sistema. A componente da resultante na direção  $x_j$  é a soma de uma componente  $f_j$  devida aos vínculos e uma componente  $F_j$  devida a todas as outras forças aplicadas. Aplicando a segunda lei de Newton à partícula obtém-se

$$m_j \ddot{x}_j = F_j + f_j \quad (42)$$

Esta expressão pode ser colocada na equação (41), de forma que

$$\frac{d p_i}{d t} = \sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3N} f_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad . \quad (43)$$

Da definição (26) é aparente que o primeiro termo à direita da igualdade é a força generalizada  $Q_i$ , correspondente às forças aplicadas

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad . \quad (44)$$

e de uma maneira similar, o termo

$$\sum_{j=1}^{3N} f_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

é uma força generalizada que resulta das forças vinculares.

O trabalho realizado pelas forças vinculares  $f_j$  em um deslocamento virtual arbitrário é

$$\delta W_c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{3N} f_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad . \quad (45)$$

De acordo com a equação (11) este trabalho deve ser nulo para qualquer conjunto de  $\delta q$ . Como os  $\delta q$  são independentes, então os coeficientes de cada  $\delta q_i$  na equação (45) devem ser nulos. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{3N} f_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad . \quad (46)$$

As equações (44) e (46) podem ser usadas para simplificar a equação (43) na forma

$$\frac{d p_i}{d t} = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (47)$$

ou, usando a equação (33)

$$\frac{d}{d t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad . \quad (48)$$

Estas  $n$  equações são conhecidas como *Equações de Lagrange* e aparecem aqui em uma das suas formas principais.

O significado físico das Equações de Lagrange pode ser mais bem visto na equação (47) que mostra que a taxa de variação em relação ao tempo da quantidade de movimento generalizada  $p_i$  é igual à força generalizada  $Q_i$  devida às forças aplicadas mais o termo  $\partial T / \partial q_i$  que é uma força de inércia generalizada causada pelo movimento nas outras coordenadas generalizadas. Para verificar este último ponto mais claramente, considere novamente o exemplo de uma partícula cuja energia cinética é expressa em termos de coordenadas esféricas. Verifica-se que

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 + m r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad .$$

O primeiro termo à direita da igualdade é a força centrífuga causada pelo movimento em  $\theta$ , enquanto o segundo termo é a componente  $r$  da força centrífuga que resulta do movimento em  $\phi$ .

Uma outra forma das Equações de Lagrange pode ser obtida para sistemas em que todas as forças generalizadas são deriváveis de uma função potencial  $V=V(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ , ou seja,

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad . \quad (49)$$

Aqui estão incluídos tanto os sistemas para os quais as funções potenciais são funções explícitas do tempo, quanto os sistemas conservativos, nos quais  $V$  é uma função exclusiva da posição.

Substituindo a expressão (49) para  $Q_i$  na equação (48), conclui-se que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad . \quad (50)$$

Definindo-se, agora, a *função Lagrangiana*  $L$  como a diferença entre a energia cinética e a função potencial, ou seja,

$$L = T - V \quad (51)$$

e como  $V$  não é uma função das velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ , então,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (52)$$

que é a forma mais comum das equações de Lagrange.

Considere, agora, um sistema em que as forças não são todas deriváveis de uma função potencial. A equação (48) é sempre aplicável, mas é mais conveniente escrever as equações de Lagrange na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (53)$$

onde os  $Q'_i$  são aquelas forças generalizadas que não são deriváveis de uma função potencial. Como antes, as outras forças são obtidas da função Lagrangiana  $L$ . Exemplos típicos de  $Q'_i$  são forças de atrito, forçantes que dependem do tempo e forças vinculares não-holônomas.

Neste item foram obtidas as equações de Lagrange a partir das Leis de Newton, usando o conceito de trabalho virtual e expressando os resultados por meio de coordenadas generalizadas e forças generalizadas. Para descrever um sistema com  $n$  graus de liberdade resultam  $n$  equações diferenciais de segunda ordem. Estas equações são equivalentes às equações do movimento que teriam sido obtidas pela aplicação direta das Leis de Newton

e, portanto, elas não contêm princípios físicos novos e independentes. Entretanto, o método de Lagrange para obter as equações do movimento é mais sistemático e frequentemente mais fácil de ser aplicado que as equações de Newton. Apenas velocidades e deslocamentos aparecem na função Lagrangiana. Nenhuma aceleração é necessária e, portanto, a necessidade de cálculos cinemáticos intrincados é frequentemente evitada. Uma vez que  $L$  é determinada, o procedimento para obter as equações do movimento é muito direto. Mais ainda, essas equações tendem a apresentar uma forma conveniente e, particularmente no caso de sistemas lineares, as equações apresentam uma simetria nos coeficientes que pode não estar aparente na formulação de Newton.

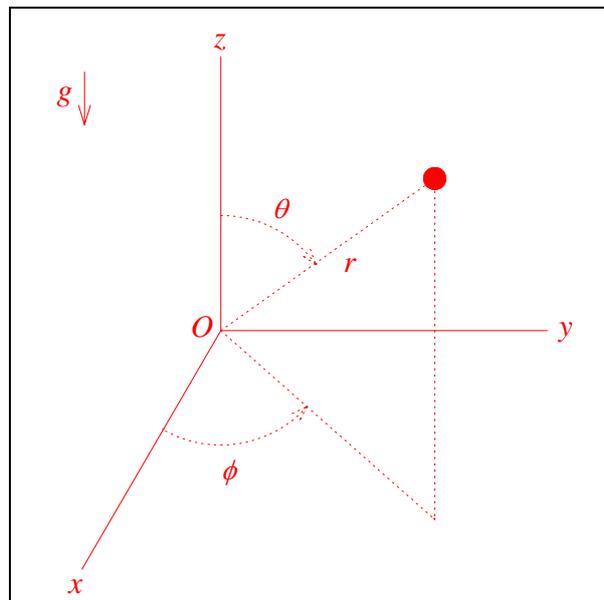
É um fato a ser lembrado que o enfoque Lagrangeano permite que se obtenham as equações do movimento para uma larga classe de problemas a partir de uma única função escalar, a função Lagrangiana  $L$ . A ênfase em energias em lugar de forças e acelerações permite que se lide com grandezas escalares. O enfoque analítico da Mecânica pode ser também formulado usando procedimentos variacionais. Em um tratamento mais avançado da Mecânica, os princípios variacionais ou de minimização são usados como o ponto de início para escreverem-se as equações de Lagrange do movimento e, de fato, as equações de Lagrange podem ser derivadas dessa maneira.

### Exemplo 1

Escreva as equações diferenciais do movimento de uma partícula de massa  $m$  em um campo gravitacional uniforme usando coordenadas esféricas.

*Solução*

A posição da partícula em relação à origem  $O$  pode ser especificada pelo conjunto de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  conforme a figura 8.



**Figura 8 - Coordenadas Esféricas**

Usando essas coordenadas, o vetor de posição da partícula em relação ao ponto fixo  $O$  é

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k} \quad ,$$

a sua velocidade é

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & (\dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \mathbf{i} \\ & + (\dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \mathbf{j} \\ & + (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{k} \end{aligned}$$

e, portanto a sua energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad . \quad (54)$$

Por outro lado, a energia potencial associada à força gravitacional que atua sobre a partícula é

$$V = mgr \cos \theta \quad , \quad (55)$$

se a referência dessa energia for colocada no plano  $Oxy$ .

A Lagrangiana do sistema é obtida, então subtraindo a energia potencial (55) da energia cinética (54):

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgr \cos \theta \quad .$$

As equações de Lagrange do movimento são obtidas usando a forma geral (52):

i) equação para a variável  $r$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m (r \dot{\theta}^2 + r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mg \cos \theta$$

*Forma final:*

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + g \cos \theta = 0 \quad (56)$$

ii) equação para a variável  $\theta$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m(r^2\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta + gr \sin\theta)$$

*Forma final:*

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - gr \sin\theta = 0 \quad (57)$$

Fora da origem ( $r \neq 0$ ) essa equação pode ser simplificada:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - g \sin\theta = 0$$

iii) equação para a variável  $\phi$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = m(2r\dot{r}\dot{\phi} \sin^2 \theta + r^2\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2r^2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

*Forma final:*

$$r^2\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin^2 \theta + 2r^2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta = 0 \quad (58)$$

Fora da origem e para  $\sin\theta \neq 0$ , esta equação pode ser simplificada:

$$r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta = 0$$

## Exemplo 2

Uma partícula de massa  $m$  escorrega sem atrito dentro de um tubo circular de raio  $r$ . O tubo gira em torno do eixo vertical com uma velocidade angular  $\omega$  constante conforme a figura 9. Escreva a equação diferencial do movimento.

*Solução*

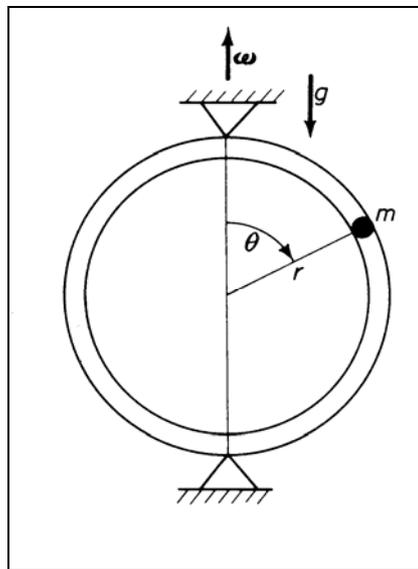
Como  $r$  é constante e  $\dot{\phi} = \omega$ , o único grau de liberdade da partícula é  $\theta$  e o movimento é descrito apenas pela equação diferencial associada a essa coordenada.

A energia cinética da partícula pode ser obtida diretamente da expressão (54) do exemplo anterior:

$$T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\omega^2 \sin^2 \theta) \quad (59)$$

e colocando a referência da energia potencial na altura do centro do tubo,

$$V = mgr \cos \theta \quad (60)$$



**Figura 9 - Uma partícula em um tubo que gira**

Assim, a Lagrangiana da partícula é

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\omega^2 \sin^2 \theta) - mgr \cos \theta \quad (61)$$

A partir de  $L$  é obtida a equação diferencial do movimento:

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m(r^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + gr \sin \theta)$$

Forma final:

$$r^2 \ddot{\theta} - r^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - gr \sin \theta = 0$$

### Exemplo 3

O bloco de massa  $m_2$  pode escorregar sobre o bloco de massa  $m_1$  que, por sua vez, pode deslizar sobre uma superfície horizontal sem atrito, conforme está esquematizado na figura 10. Pede-se calcular a aceleração do bloco de massa  $m_1$ , supondo que o coeficiente de atrito no contato entre os dois blocos seja  $\mu < 1$ .

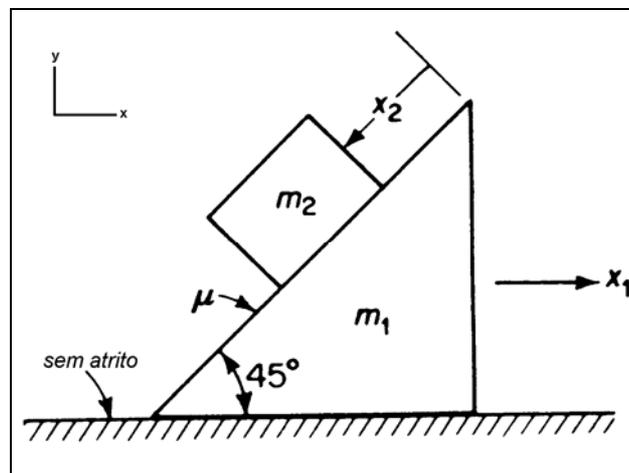


Figura 10 - Um sistema formado por blocos deslizantes

O sistema possui dois graus de liberdade. As coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  podem variar livremente sem violar os vínculos do sistema e podem ser usadas para descrever o movimento. A força gravitacional pode ser derivada de um potencial, mas a força de atrito entre os dois blocos não, de modo que devem ser usadas as equações de Lagrange na forma (53).

A velocidade do bloco de massa  $m_1$  é

$$\mathbf{v}_1 = \dot{x}_1 \mathbf{i}$$

e a velocidade do bloco de massa  $m_2$  é

$$\mathbf{v}_2 = \left( \dot{x}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x}_2 \right) \mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x}_2 \mathbf{j}$$

de forma que a energia cinética total do sistema é

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 - \sqrt{2}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2)$$

Para a energia potencial do sistema contribui apenas a força peso do bloco de massa  $m_2$ , já que o movimento do bloco de massa  $m_1$  não tem componente na direção vertical. Assim, colocando a referência da energia potencial na origem de  $x_2$ ,

$$V = -\frac{\sqrt{2}}{2}m_2 g x_2$$

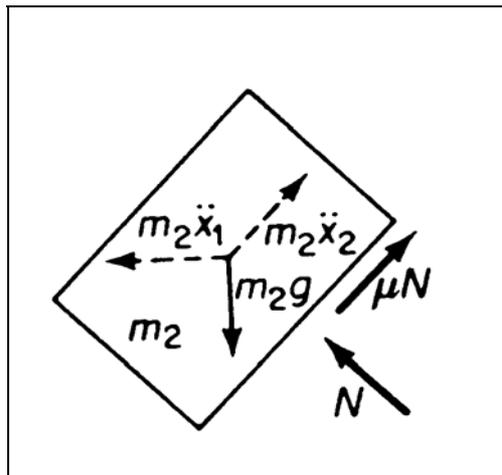
A Lagrangiana do sistema é, então,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 - \sqrt{2}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}m_2 g x_2$$

O próximo passo é calcular as forças generalizadas  $Q'_1$  e  $Q'_2$  que levam em conta o efeito das forças de atrito correspondente, respectivamente, aos deslocamentos virtuais  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$ . Como um deslocamento virtual de  $x_1$  não envolve escorregamento entre os blocos, a força de atrito não realiza trabalho e, portanto,

$$Q'_1 = 0$$

Um deslocamento de  $x_2$ , entretanto, envolve trabalho virtual da força de atrito. Segundo a lei de Coulomb, a força de atrito no escorregamento é proporcional à força normal que aparece no contato entre os blocos. Esta força, infelizmente, não aparece de forma explícita na formulação de Lagrange. No entanto, ela pode ser calculada a partir do diagrama de corpo livre que aparece na figura 11, onde estão representadas as forças que atuam sobre  $m_2$ , incluindo as forças de inércia, pois os blocos se encontram em movimento no instante dos deslocamentos virtuais.



**Figura 11 - Diagrama de corpo livre de  $m_2$**

Assim, usando o princípio de d'Alembert, o equilíbrio das forças na direção normal à superfície de escorregamento resulta na equação:

$$N + \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 (\ddot{x}_1 - g) = 0$$

e, portanto,

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 (g - \ddot{x}_1)$$

O trabalho virtual da força de atrito é

$$\delta W = -\mu N \delta x_2$$

Mas,

$$\delta W = Q'_2 \delta x_2$$

e, portanto,

$$Q'_2 = -\mu N = \mu \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 (\ddot{x}_1 - g)$$

O próximo passo é montar as equações de Lagrange na forma (53):

i) equação em  $x_1$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 - m_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 - m_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

*Forma final:*

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 - m_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \ddot{x}_2 = 0 \tag{62}$$

ii) equação em  $x_2$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \left( \dot{x}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x}_1 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \left( \ddot{x}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ddot{x}_1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g$$

*Forma final:*

$$m_2 \left( \ddot{x}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ddot{x}_1 \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g = \mu \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 (\ddot{x}_1 - g)$$

ou

$$\ddot{x}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \mu) \ddot{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} g (1 - \mu) \quad (63)$$

Para calcular a aceleração  $\ddot{x}_1$  do bloco de massa  $m_1$  basta, agora, isolar o valor de  $\ddot{x}_2$  da equação (63) e substituí-lo na equação (62):

$$\ddot{x}_1 = \frac{(1 - \mu) m_2 g}{2m_1 + (1 - \mu) m_2}$$

Note, aqui, o significado da hipótese  $\mu < 1$  estabelecida no enunciado: ela garante que a aceleração do bloco  $m_1$  é positiva e, portanto, a aceleração do bloco  $m_2$  também o é (vide (62)). Assim, o bloco  $m_2$  tende a descer em relação ao bloco  $m_1$  e, dessa forma, o sentido da força de atrito indicado na figura (62) está correto.

## 12. FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE RAYLEIGH

As forças generalizadas  $Q'_i$  que aparecem na equação (53) incluem as forças não-conservativas que não podem ser derivadas a partir de um potencial. Dentre essas forças existe uma classe que deve receber uma atenção especial que engloba as forças que são proporcionais à velocidade da partícula e resistem ao movimento, isto é, agem na mesma direção da velocidade, mas em sentido oposto, e têm a forma:

$$F_j = -c_j \dot{x}_j \quad (64)$$

onde os coeficientes  $c_j$  dependem das coordenadas mas não das velocidades. Funções deste tipo são dissipativas, pois sua potência é negativa e, por isso, o sistema perde energia quando elas agem.

Essas forças merecem uma atenção especial pois, como será discutido neste item, elas também podem ser derivadas de uma função escalar. De fato, o trabalho realizado por elas em um deslocamento virtual é

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} F_j \delta x_j = - \sum_{j=1}^{3N} c_j \dot{x}_j \delta x_j \quad (65)$$

Mas, de (23) e (35)

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \quad (66)$$

Então a expressão (65) pode ser colocada na forma

$$\delta W = - \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{3N} c_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i = - \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (c_j \dot{x}_j^2) \right] \delta q_i \quad (67)$$

Definindo a função  $R$  pela expressão

$$R = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} c_j \dot{x}_j^2 \quad (68)$$

o trabalho virtual das forças não conservativas proporcionais à velocidade pode ser colocado na forma

$$\delta W = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \quad (69)$$

Mas este trabalho também pode ser escrito em termos das forças e coordenadas generalizadas,

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q'_i \delta q_i \quad (70)$$

Então as forças generalizadas correspondentes às forças não conservativas proporcionais à velocidade podem ser obtidas diretamente da função  $R$ , comparando-se as expressões (69) e (70), ou seja,

$$Q'_i = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (71)$$

Assim, se as únicas forças não conservativas existentes forem proporcionais à velocidade, as equações de Lagrange (53) assumem a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (72)$$

Agora as equações que governam o movimento são obtidas a partir de duas funções escalares, a Lagrangiana  $L$  e a função  $R$  que é conhecida como *função de dissipação de Rayleigh*.

### Exemplo

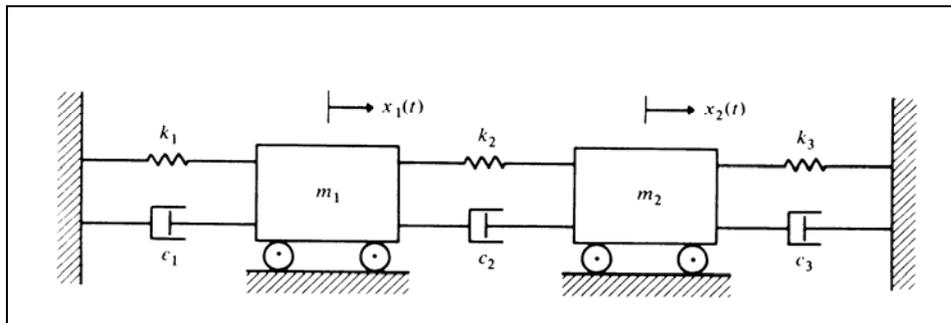
Montar as equações do movimento do sistema esquematizado na figura 12.

#### Solução

Este é um sistema de dois graus de liberdade cuja posição é perfeitamente descrita pelas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  que medem os deslocamentos das massas a partir de suas posições de equilíbrio. A energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

e a energia potencial total corresponde à energia armazenada nas três molas



**Figura.12 - Sistema composto por massas molas e amortecedores**

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 \quad ,$$

de forma que a Lagrangiana do sistema é

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 x_2^2 .$$

As forças nos amortecedores são proporcionais às velocidades e para levá-las em conta basta montar a função de Rayleigh conforme a definição (68)

$$R = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 \dot{x}_2^2 \quad .$$

Para este problema devem ser montadas, então, as equações de Lagrange na forma (72):

i) equação para a coordenada  $x_1$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

*Forma final:*

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

ii) equação para a coordenada  $x_2$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 \dot{x}_2$$

*Forma final:*

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0$$

### 13. PEQUENAS OSCILAÇÕES

Considere que o comportamento de um sistema seja descrito pela equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) \tag{73}$$

e que a origem  $x=0$  seja uma posição de equilíbrio, isto é,

$$f(0) = 0 \tag{74}$$

A função  $f$  pode ser expandida na série de Taylor

$$f(x) = f_1 x + R_2(x) \tag{75}$$

onde

$$f_1 = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \tag{76}$$

e  $|R_2(x)|$  é da ordem de  $x^2$ .

A equação diferencial

$$\dot{x} = f_1 x \tag{77}$$

é a equação *linearizada* associada à equação original (73). Se o movimento do sistema permanece restrito a uma vizinhança da origem, a equação linearizada representa bem o seu comportamento.

Seja, agora, um sistema descrito pelas equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{78}$$

Em coordenadas generalizadas a energia cinética pode ser escrita sob a forma geral

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{79}$$

Definindo

$$a_{jk} = \alpha_{jk}(0, \dots, 0) \tag{80}$$

então a primeira parcela da expansão da energia cinética em série de Taylor em torno da origem pode ser escrita na forma

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{81}$$

onde o índice 2 foi usado para indicar que a expressão é quadrática nas velocidades generalizadas.

Considere, agora, a expansão da energia potencial  $V$  em série de Taylor em torno da origem das coordenadas generalizadas:

$$V = V_0 + V_1 + V_2 \quad (82)$$

A primeira parcela,  $V_0$ , é um termo constante, que é arbitrário, pois não influi nas equações do movimento onde aparecem apenas derivadas da energia potencial. A segunda parcela,  $V_1$ , é a parcela linear que tem a forma geral

$$V_1(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial V}{\partial q_j} \right]_{origem} q_j \quad (83)$$

e a última parcela,  $V_2$ , é a parcela quadrática dada por

$$V_2(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right]_{origem} q_j q_k \quad (84)$$

Se a origem é um ponto de equilíbrio, a energia potencial é mínima nesse ponto e todas as suas derivadas parciais primeiras se anulam na origem

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial q_j} \right]_{origem} = 0 \quad (85)$$

e, portanto,

$$V_1(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (86)$$

Nesse caso, a parcela da energia potencial de menor ordem a ser considerada é a parcela quadrática  $V_2$ .

Definindo

$$b_{jk} = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right]_{origem} \quad (87)$$

a energia potencial pode ser colocada na forma

$$V_2(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} q_j q_k \quad (88)$$

A Lagrangiana a ser considerada no problema linearizado será, então,

$$L_2 = T_2 - V_2 \quad (89)$$

Montem-se, agora, as equações de Lagrange. De (89), (81) e (88)

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k \quad (90)$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k \quad (91)$$

Das expressões (89), (81) e (88) segue também que

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_i} = -\frac{\partial V_2}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^n b_{ik} q_k \quad (92)$$

Substituindo-se as expressões (91) e (92) na expressão (78), obtêm-se as equações de Lagrange na forma linear

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{ik} q_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (93)$$

que são válidas para pequenos movimentos em torno da posição de equilíbrio.

Estas equações também podem ser apresentadas na forma matricial, mais compacta. Para isso definam-se as matrizes [A] e [B] tais que

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (94)$$

e

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (95)$$

e coloquem-se as coordenadas generalizadas no vetor {q}, definido por

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (96)$$

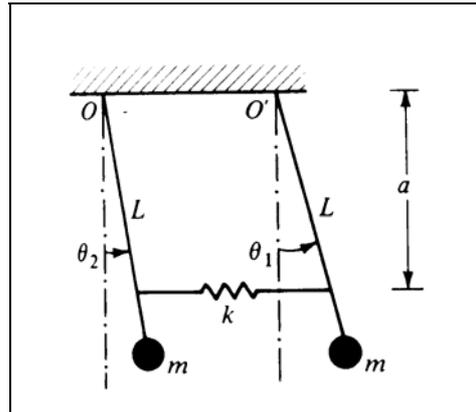
Com essas definições as equações de Lagrange linearizadas podem ser escritas na forma

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{q\} = \{0\} \quad (97)$$

A matriz [A] é chamada de *matriz de massa* do sistema e a matriz [B] é chamada de *matriz de rigidez* do sistema. A relação (87) mostra que a matriz de rigidez é simétrica. Pode-se mostrar que a matriz de massa também é simétrica.

### Exemplo

Monte as equações de Lagrange para o sistema formado pelos dois pêndulos acoplados, esquematizado na figura 13, linearizadas em torno da posição de equilíbrio  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , sabendo que nessa posição a mola está indeformada.



**Figura 13 - Dois pêndulos acoplados por uma mola**

### Solução

A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} mL^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) = T_2$$

e a energia potencial é a soma da energia armazenada na mola com a energia potencial gravitacional

$$V = \frac{1}{2} ka^2 (\text{sen } \theta_1 - \text{sen } \theta_2)^2 - mgL (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

com a referência da energia potencial fixada na extremidade superior dos pêndulos.

Lembrando as expansões em série da função seno

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5)$$

e da função cosseno

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$$

a parte quadrática da energia potencial será

$$V_2 = \frac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}mgL(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

e a Lagrangiana a ser considerada no problema linearizado será

$$L_2 = T_2 - V_2 = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - \frac{1}{2}mgL(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

A partir daqui é só montar as equações de Lagrange.

i) equação para a coordenada  $\theta_1$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}_1} = mL^2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = mL^2 \ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgL\theta_1$$

*Forma final:*

$$mL^2 \ddot{\theta}_1 + (ka^2 + mgL)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0 \quad (98)$$

ii) equação para a coordenada  $\theta_2$

*Etapas intermediárias:*

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}_2} = mL^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = mL^2 \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgL\theta_2$$

*Forma final:*

$$mL^2 \ddot{\theta}_2 - ka^2\theta_1 + (ka^2 + mgL)\theta_2 = 0 \quad (99)$$

Note que as equações de Lagrange linearizadas (98) e (99) podem ser agrupadas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} ka^2 + mgL & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 14. BIBLIOGRAFIA

França, L. N. F. *Mecânica Analítica - 1ª parte*. Monografia n° 87/93. Departamento de Engenharia Mecânica - EPUSP.

Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Second Edition, Addison-Wesley, 1980.

Greenwood, D. T. *Principles of Dynamics*. Second Edition, Prentice-Hall, 1988.

Lanczos, C. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications, 1970.

Meirovitch, L. *Elements of Vibration Analysis*. Second Edition, McGraw Hill, 1986.

Meirovitch, L. *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, 1970.