## IMPULSO E CHOQUE – FUNDAMENTOS

RENATO MAIA MATARAZZO ORSINO

### 1. Leis de Newton

**Lex I.** *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

**Primeira Lei de Newton.** Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.

**Lex II.** *Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

**Segunda Lei de Newton.** A mudança de movimento é proporcional à força motora impressa, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.

**Lex III.** *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sine corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

**Terceira Lei de Newton.** A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

Basicamente, a Primeira Lei versa sobre a natureza do que atualmente se denomina *referencial inercial*. A interpretação da Segunda Lei, contudo, é menos imediata que a equação $m\vec{a} = \vec{F}$, *proposta por Euler anos depois*, faz parecer. Ainda que alguns autores defendam que os termos "mudança de movimento" e "força motora impressa" devam ser diretamente interpretados à luz dos conceitos atuais da Mecânica Clássica como "variação da quantidade de movimento" e "impulso resultante", respectivamente, estudiosos das obras de Newton [1, 2, 3] ainda tentam desvendar o que exatamente ele quis dizer em seu enunciado original.

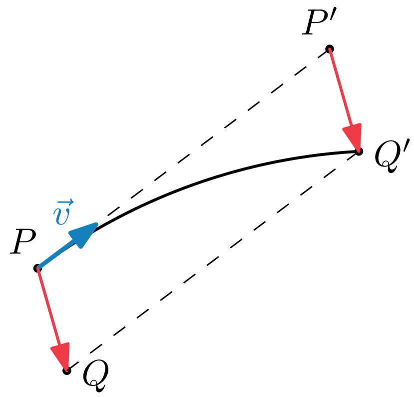


Figura 1. Interpretação de Newton para a Segunda Lei. Adaptado de [2].

À luz da Primeira Lei, é possível entender que, observado de um referencial inercial, o movimento de uma partícula material na ausência da ação de quaisquer forças será retilíneo

*Date*: 4 de Abril de 2019.

e uniforme na direção do vetor velocidade inicialmente medido. No caso particular desta velocidade ser nula, a partícula permanecerá em repouso quando observada do referido referencial. Considere a ilustração mostrada na Fig. 1: na ausência de forças, a partícula material em $P$ em um instante de tempo $t_0$ estaria, em um instante de tempo futuro $t_0 + \Delta t$, numa posição $P'$. Por efeito da ação de forças, contudo, a partícula estará, em $t = t_0 + \Delta t$, na posição $Q'$. O vetor $(Q' - P')$ era entendido, na visão de Newton [2], como a "mudança de movimento" da partícula.

Admitindo $\Delta t$ pequeno, é possível aplicar o Teorema de Taylor para descrever o deslocamento $(Q' - P)$ efetivamente observado para a partícula material:

$$(Q' - P) = \vec{v}\,\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(\Delta t)^2 + O[\Delta^3] \tag{1}$$

A medida da "mudança de movimento" é a diferença entre o deslocamento observado $(Q' - P)$ e o deslocamento $(P' - P) = \vec{v}\,\Delta t$ que teria ocorrido na ausência de forças.

$$(Q' - P') = \frac{1}{2}\vec{a}(\Delta t)^2 + O[\Delta^3] = (Q - P) \tag{2}$$

onde $(Q - P)$ seria o deslocamento observado para a referida partícula, sob ação das mesmas forças, caso ela partisse do repouso no instante $t = t_0$.

Assim, considerando $(\Delta t)^2$ um infinitesimal, pode-se entender que o conceito de "mudança de movimento" proposto por Newton é pode efetivamente ser entendido como uma grandeza proporcional ao que é atualmente denominado, na Mecânica Clássica, como "aceleração". Tal interpretação, contudo, está associada à possibilidade de se aplicar o Teorema de Taylor, o que envolve admitir uma suavidade na trajetória da partícula. Tal limitação pode ser devidamente superada, recorrendo a uma forma generalizada deste teorema que depende apenas da diferenciabilidade dos deslocamentos:

$$(Q' - P) = \vec{v}\,\Delta t + \beta\Delta\vec{v}\ \Delta t + O[\Delta^{2+\epsilon}] \tag{3}$$

para valores de $\beta$ e $\epsilon$ tais que $0 \leq \beta \leq 1$ e $\epsilon > 0$. Neste caso, a "mudança de movimento" $(Q' - P') = \beta\Delta\vec{v}\ \Delta t + O[\Delta^{2+\epsilon}]$ é proporcional a uma variação infinitesimal $\Delta\vec{v}$ na velocidade da partícula, o que permite a associação com o conceito atual da Mecânica Clássica de "quantidade de movimento".

Para ilustrar, todavia, que a equação $m\vec{a} = \vec{F}$, proposta por Euler em seus estudos sobre dinâmica dos corpos rígidos, *não* corresponde à forma mais geral de se enunciar a Segunda Lei de Newton, considere o sistema ilustrado na Fig. 2 formado por uma partícula de massa $m$ finita, à qual adere uma porção material de massa infinitesimal $\Delta m$ em um intervalo de tempo também infinitesimal de duração $\Delta t$. Considere que no instante de tempo $t_0$ a partícula tem velocidade $\vec{v}$ e a porção material que adere à mesma tem velocidade $\vec{u}$. Admite-se então que, no instante de tempo $t_0 + \Delta t$, tem-se uma única partícula material de massa $m + \Delta m$ com velocidade $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.

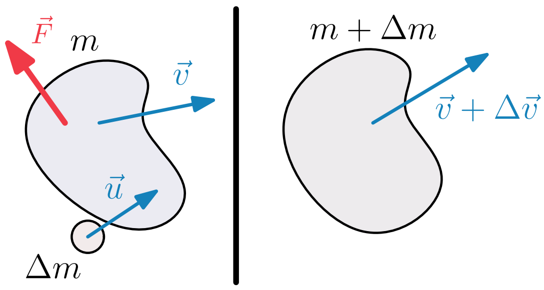


Figura 2. Partícula com massa variável.

Admitindo que a força resultante sobre a partícula tem comportamento contínuo e valor $\vec{F}$ no instante inicial, e considerando que todas as grandezas $\Delta$ são de ordem de grandeza infinitesimal, igualando a variação de quantidade de movimento deste sistema ao impulso da resultante, pode-se afirmar que:

$$[(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-(m\,\vec{v}+\Delta m\,\vec{u})]=\vec{F}\,\Delta t+O[\Delta^2] \tag{4}$$

$$m\,\Delta\vec{v}+\Delta m(\vec{v}-\vec{u})+O[\Delta^2]=\vec{F}\,\Delta t+O[\Delta^2] \tag{5}$$

Dividindo a expressão da última equação por $\Delta t$ e tomando o limite $\Delta t\to 0$, obtém-se a denominada *Equação de Mechersky* que corresponde à forma mais geral possível para a Segunda Lei de Newton, por incluir a possibilidade de variação de massa da partícula:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v}-\vec{u})=\vec{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\vec{F}+\dot{m}\vec{u} \tag{6}$$

Ao final do curso de Mecânica 2, o Prof. Dr. Celso P. Pesce ministrará uma palestra acerca da Mecânica de Sistemas de Massa Variável.

## 2. Impulso e Quantidade de Movimento

Considere uma partícula de massa $m$ constante, para a qual a Segunda Lei de Newton adquire a forma proposta por Euler, $m\vec{a}=\vec{F}$, com $\vec{a}=\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ denotando a aceleração desta partícula medida com respeito a um referencial inercial e $\vec{F}$ a força resultante sobre a mesma. Pode-se integrar, em um intervalo de tempo $[t_0,t_0+\Delta t]$ esta equação, resultando em:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

Denotando por $\vec{v}$ a velocidade da partícula medida no instante de tempo $t_0$ e por $\vec{v}'$ esta velocidade medida no instante $t_0+\Delta t$, a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo conduz à expressão.

$$m(\vec{v}\,'-\vec{v})=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

A integral no membro direito da equação anterior é denominada impulso de $\vec{F}$ no intervalo $[t_0,t_0+\Delta t]$.

Admita-se que a duração $\Delta t$ do intervalo de tempo $[t_0,t_0+\Delta t]$ é de ordem infinitesimal $\Delta$. Neste intervalo, o a partícula material está sujeita a um impacto, de tal forma que é possível decompor a força resultante sobre ela em duas parcelas:

- $\vec{F}_{\mathrm{I}}$: resultante das denominadas *forças impulsivas*, decorrentes do impacto sofrido, cujo valor médio tem, por hipótese, ordem de grandeza inversamente proporcional à duração $\Delta t$ do intervalo de tempo, ou seja, $\vec{F}_{\mathrm{I}}\sim O[\Delta^{-1}]$.
- $\vec{F}_{\mathrm{N}}$: resultante de forças cujas magnitudes, mesmo durante o impacto, preservam ordem de grandeza unitária, ou seja, $\vec{F}_{\mathrm{I}}\sim O[1]$.

Denotando por $\vec{I}/\Delta t$ o valor médio da resultante $\vec{F}_{\mathrm{I}}$ das forças impulsivas no intervalo de tempo $[t_0,t_0+\Delta t]$, com $\vec{I}\sim O[1]$ denotando o *impulso* associado a estas forças, é possível afirmar que:

$$\vec{v}\,'-\vec{v}=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\vec{F}_{\mathrm{I}}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\vec{F}_{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}t=\frac{\vec{I}}{m}+O[\Delta]\sim O[1] \tag{9}$$

Assim, para algum $\beta$, $0\le\beta\le 1$, o valor médio da velocidade da partícula no intervalo $[t_0,t_0+\Delta t]$ pode ser dado por $(\vec{v}+\beta\vec{I}/m)+O[\Delta]\sim O[1]$.

Denotando por $\vec{r}$ o vetor posição da partícula medido com respeito a um ponto fixo ao referencial inercial adotado, pode-se afirmar que:

$$\vec{r}\,' - \vec{r} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \left(\vec{v} + \beta\frac{\vec{I}}{m} + O[\Delta]\right)\Delta t \sim O[\Delta] \tag{10}$$

Pode-se então concluir que, em virtude de um impacto de duração *infinitesimal*, a partícula sofreu uma variação *finita* de velocidade simultânea a uma variação *infinitesimal* na posição.

Portanto, o efeito de um impacto de curta duração, em que a ordem de grandeza das forças impulsivas a ele associadas é inversamente proporcional a tal duração, será modelado daqui adiante por meio de *impulsos* finitos que promovem alterações *finitas e instantâneas* nas velocidades dos pontos de um sistema material *sem promover qualquer alteração na posição* dos mesmos. Como consequência desta hipótese, na modelagem de um impacto, deve ser *desprezado* o efeito de quaisquer esforços não-vinculares cuja ação sobre o sistema se manifeste apenas mediante variação na posição de algum ponto do mesmo, caso de esforços *conservativos*[1], por exemplo.

## 3. Sistemas de Impulsos e Sistemas de Quantidade de Movimento

| | **Impulsos** | **Quantidades de movimento** |
|---|---|---|
| Definição | $\mathcal{I} = \{(\vec{I}_i, P_i), i = 1, \ldots, n\}$ | $\mathcal{Q} = \{(m_i\vec{v}_i, P_i), i = 1, \ldots, n\}$ |
| Resultante do sistema | $\vec{I} = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i$ | $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G$ |
| Momento do sistema | $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n}(P_i - O) \wedge \vec{I}_i$ | $\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{n}(P_i - O) \wedge (m_i\vec{v}_i)$ |
| Mudança de pólo | $\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}$ | $\vec{H}_B = \vec{H}_A + (A - B) \wedge (m\vec{v}_G)$ |

## 4. Teoremas da Resultante dos Impulsos e do Momento dos Impulsos

Calculando a variação da quantidade de movimento total do sistema:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i' - \vec{v}_i) = m(\vec{v}_G' - \vec{v}_G) \tag{11}$$

Da equação (8), sabe-se que: $m_i(\vec{v}_i' - \vec{v}_i) = \vec{I}_i^{\,\text{ext}} + \vec{I}_i^{\,\text{int}}$. Como decorrência do princípio da ação e reação (Terceira Lei de Newton), pode-se afirmar que o sistema de impulsos internos é equivalente a zero (i.e. $\vec{I}^{\,\text{int}} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O^{\text{int}} = \vec{0}$ para qualquer pólo $O$), pode-se afirmar que $\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i' - \vec{v}_i) = \vec{I}^{\,\text{ext}}$ e, portanto:

$$m(\vec{v}_G' - \vec{v}_G) = \vec{I}^{\,\text{ext}} \tag{12}$$

Esta é a expressão do *Teorema da Resultante dos Impulsos (TRI).*

Para calcular a variação do momento da quantidade de movimento do sistema, é necessário lembrar que, por hipótese, admite-se que a posição de todos os pontos do sistema permanece

[1] De fato, se um esforço é conservativo, a ele pode ser associado uma energia potencial $V(\vec{r})$, sendo a ação deste esforço sobre o sistema medida por meio do trabalho $W = -\Delta V(\vec{r})$, que será nulo se admitirmos a ausência de qualquer variação na posição dos pontos de um sistema material, ou seja, se $\Delta\vec{r} = \vec{0}$.

invariante durante o impacto, ou seja:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{H}_O = \vec{H}'_O - \vec{H}_O &= \sum_{i=1}^{n}(P_i - O)\wedge(m_i\vec{v}'_i) - \sum_{i=1}^{n}(P_i - O)\wedge(m_i\vec{v}_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(P_i - O)\wedge m_i(\vec{v}'_i - \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}(P_i - O)\wedge(\vec{I}_i^{\text{ext}} + \vec{I}_i^{\text{int}})\\ &= \sum_{i=1}^{n}(P_i - O)\wedge\vec{I}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n}(P_i - O)\wedge\vec{I}_i^{\text{int}} \end{aligned} \tag{13}$$

Recorrendo novamente ao fato de que o sistema de impulsos internos é equivalente a zero e, portanto, $\vec{M}_O^{\text{int}} = \vec{0}$, obtém-se a expressão do *Teorema do Momento dos Impulsos (TMI)*:

$$\Delta\vec{H}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}} \tag{14}$$

## 5. Teorema do Momento dos Impulsos para um Corpo Rígido

Considere um sistema mecânico constituído por *um único corpo rígido* e assuma que $Q$ é um ponto que se move *solidariamente a este corpo*, de tal forma que é possível explicitar a velocidade $\vec{v}_i$ de qualquer ponto deste corpo a partir da equação de campo de velocidade para um corpo rígido:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_Q + \vec{\omega}\wedge(P_i - Q) \tag{15}$$

Sendo $\mathbb{J}_Q$ o tensor de inercia desse corpo rigido com respeito ao ponto $Q$, o momento da quantidade de movimento desse corpo rígido com respeito ao pólo $Q$ pode ser calculado por meio da seguinte expressão:

$$\vec{H}_Q = m(G - Q)\wedge\vec{v}_Q + \mathbb{J}_Q\vec{\omega} \tag{16}$$

Novamente, admitindo que a posição de todos os pontos do sistema permaneça invariante durante o impacto:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{H}_Q = \vec{H}'_Q - \vec{H}_Q &= \left[m(G - Q)\wedge\vec{v}'_Q + \mathbb{J}_Q\vec{\omega}'\right] - \left[m(G - Q)\wedge\vec{v}_Q + \mathbb{J}_Q\vec{\omega}\right]\\ &= m(G - Q)\wedge(\vec{v}'_Q - \vec{v}_Q) + \mathbb{J}_Q(\vec{\omega}' - \vec{\omega})\end{aligned} \tag{17}$$

Finalmente, substituindo em (14), obtém-se a expressão do Teorema do Momento dos Impulsos (TMI) para *um* corpo rígido:

$$m(G - Q)\wedge\Delta\vec{v}_Q + \mathbb{J}_Q\Delta\vec{\omega} = \vec{M}_Q^{\text{ext}} \tag{18}$$

Casos particulares:

$$Q = G \qquad \mathbb{J}_G\Delta\vec{\omega} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \tag{19}$$

$$\Delta\vec{v}_Q = \vec{0} \;\text{ ou }\; (G - Q)\parallel\Delta\vec{v}_Q \qquad \mathbb{J}_Q\Delta\vec{\omega} = \vec{M}_Q^{\text{ext}} \tag{20}$$

## Referências

[1] B. Pourciau, "Newton ' s Interpretation of Newton ' s Second Law," *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 60, no. 2, pp. 157–207, 2006.

[2] B. Pourciau, "Is Newton's second law really Newton's?," *American Journal of Physics*, vol. 79, no. 10, pp. 1015–1022, 2011.

[3] R. L. Coelho, "On the deduction of Newton's second law," *Acta Mechanica*, vol. 229, no. 5, pp. 1–4, 2018.