

NOTAS DE AULA
CINEMÁTICA E DINÂMICA DE CORPO RÍGIDO

J.A.P.Aranha
NDF - EPUSP

2007-2008

ÍNDICE

1. CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO	pág. 3
1.1: <i>MATRIZES ORTOGONAIS DE ROTAÇÃO</i>	pág. 4
1.2: <i>VELOCIDADE E ACELERAÇÃO</i>	pág. 8
1.3: <i>ÁLGEBRA DO PRODUTO VETORIAL</i>	pág. 13
1.4: <i>ÂNGULOS DE EULER</i>	pág. 15
1.5: <i>EXERCÍCIOS</i>	pág. 16
2. DINÂMICA DE CORPO RÍGIDO	pág. 21
2.1: <i>AGREGADO RÍGIDO DE PARTÍCULAS – FORÇAS DE VÍNCULO</i>	pág. 21
2.2: <i>PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS</i>	pág. 22
2.3: <i>ENERGIA CINÉTICA E QUANTIDADE DE MOVIMENTO</i>	pág. 28
2.4: <i>EQUAÇÕES DE EULER DE UM CORPO RÍGIDO</i>	pág. 35
2.5: <i>EXERCÍCIOS</i>	pág. 44
3. TRABALHO VIRTUAL E EQUAÇÕES DE LAGRANGE	
3.1: <i>SISTEMAS VINCULADOS E DESLOCAMENTO VIRTUAL</i>	pág. 57
3.2: <i>EQUAÇÕES DE LAGRANGE</i>	pág. 57
3.3: <i>EQUAÇÃO LOCAL DA SUPERFÍCIE DE VÍNCULO $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$</i>	pág. 66
3.4: <i>APÊNDICE: INTRODUÇÃO AOS TENSORES</i>	pág. 71
3.5: <i>EXERCÍCIOS</i>	pág. 75
4. APLICAÇÕES	pág. 81
3.1: <i>BALANCEAMENTO</i>	pág.xxx
3.2: <i>DINÂMICA DO PIÃO</i>	pág.xxx
3.3: <i>GIROSCÓPIO</i>	pág.xxx
3.4: <i>MANOBRA DE AERONAVES</i>	pág.xxx
3.5: <i>EXERCÍCIOS</i>	pág.xxx
5. REFERÊNCIAS	pág.xxx

* * *

1. CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

A Mecânica Newtoniana preocupava-se, em seus primórdios, principalmente com o movimento dos astros e dada a imensa discrepância entre as dimensões desses corpos celestes e a distância entre eles pareceu natural, pelo menos em uma primeira aproximação, que se considerasse os astros como “*pontos materiais*”, isso é, como partículas pontuais sem dimensão mas com uma massa bem definida e finita.

Na gênese mesma da Mecânica surge portanto essa entidade abstrata – os “*pontos materiais*” – e é evidência reconhecida do gênio de Newton (1642-1727) estender para os astros as mesmas leis estipuladas para o movimento dos corpos terrestres e o contrário, dos astros para a Terra: talvez resida aí, em sua origem, a vertente “cósmica” do pensamento da Física, da busca incessante pelo geral e universal e um distanciamento proposital do particular e específico. E nessa volta do “cósmico” para o “mundano” Newton e seus seguidores trouxeram para nossos problemas mais cotidianos essa idéia de “*pontos materiais*”, que perpassa todo tratamento clássico dado aos problemas usuais da Mecânica.

Mas as dimensões dos corpos, justificadamente deixada de lado no movimento dos astros – na “música das esferas”, no dizer dos clássicos – não pode ser ignorada¹ no tratamento de muitos problemas terrestres, no estudo do próprio movimento de rotação da Terra, por exemplo. Nesse contexto os corpos não podem ser mais identificados com “*pontos materiais*” e a dinâmica dos “*corpos extensos*”, não “pontuais”, foi desenvolvida em meados do século 18 por Euler (1707-1783).

Embora os “corpos extensos” se deformem sob a ação de esforços externos – e a análise dessa *deformação* é objeto de estudo da *teoria da elasticidade* – ela pode ser desconsiderada em uma primeira aproximação, posto que desprezíveis face o movimento global dos corpos, e é por isso natural que se considere o movimento dos “corpos extensos” considerando um segundo nível de abstração: eles não são mais

¹ É outra prova a mais do gênio de Newton sua hesitação em considerar os astros como “*pontos materiais*”, mesmo sabendo da tremenda discrepância de escalas de comprimento já citada. Na tentativa de estender a mesma lei de gravitação proposta para os astros para a gravidade terrestre era necessário considerar a massa da Terra concentrada em seu centro. Diz a história que Newton demorou mais de dez anos para publicar seus resultados até se convencer que a força de atração causada por um *corpo esférico homogêneo* é idêntica a de um “ponto material” de mesma massa colocada no centro da esfera. Essa hesitação de Newton, por muitos entendida como uma exteriorização de sua psique naturalmente desconfiada – ver, por exemplo, Whittaker (1950) “*The History of the Theories of Aether and Electricity*” e Westfall (1995) “*A Vida de Newton*” – tem um fulcro conceitual que não deve ser ignorado. Como discutido no exercício (1.1), esse resultado, assim como tantos outros na *teoria da gravitação*, depende essencialmente do fato da força de atração entre corpos ser *exatamente* proporcional ao inverso do quadrado da distância: fosse ela proporcional a $1/r^{2+\alpha}$, com $0 < \alpha \ll 1$, não só essa equivalência não seria correta como também a teoria da gravitação perderia parte dos atributos que a distingue. A mesma relação *exata* $1/r^2$ é observada na eletrostática (lei de Coulomb) e o fator 2 nessa lei foi verificado experimentalmente como correto com um erro menor que $1: 10^9$.

“pontuais”, posto que “extensos”, mas são considerados *rígidos* em primeira aproximação. O presente texto procura discutir os fundamentos da *dinâmica dos corpos rígidos*, um assunto que tem vasta aplicação em diferentes tópicos da Engenharia: pois rígidos podem ser considerados os navios, aviões, satélites, as partes articuladas de um robô e uma série de mecanismos, como o giroscópio, por exemplo, utilizados com os mais diversos fins.

Algumas dessas aplicações serão apresentadas e discutidas na seção final mas o foco desse texto concentra-se em alguns aspectos teóricos mais básicos: ele procura estabelecer uma relação de continuidade entre a dinâmica clássica dos “*pontos materiais*” e a dinâmica dos “*corpos rígidos*”. Para tanto consideraremos, como uma introdução ao tema, um agregado de “pontos materiais” $\{m_i ; i = 1,2,\dots,N\}$ rigidamente conectados entre si e estudaremos o movimento desse agregado de pontos sujeitos à ação de *forças externas*, que determinam o movimento do conjunto, e de *forças internas*, que mantêm os pontos materiais rigidamente ligados entre si.

Se $l_{ij}(t)$ for a distância entre as massas m_i e m_j no instante t , o *vínculo* introduzido pelo *movimento de corpo rígido* exige $l_{ij}(t) = \text{cte.}$ e as *forças internas* são, na realidade, as *forças de vínculo* necessárias para manter essa restrição. Ocorre que essas forças de vínculo são desconhecidas a priori e devem ser, por isso, retiradas do equacionamento do movimento global. É nesse ponto que um procedimento aparentemente ingênuo, relacionado ao *Princípio dos Trabalhos Virtuais* da Mecânica Analítica desenvolvida por Lagrange² (1736-1813)), mostra sua importância teórica e vigor conceitual separando, de uma forma muito clara, a dinâmica do agregado de partículas em duas partes distintas e “ortogonais”: uma, que toma conta do movimento global do agregado de partículas; outra, que determina as forças de vínculo a partir do movimento global. A *cinemática* dos corpos rígidos será elaborada a seguir e a *dinâmica*, onde as forças de vínculo são tratadas, na seção 2.

1.1: MATRIZES ORTOGONAIS DE ROTAÇÃO

Considerando um agregado de “pontos materiais” $\{m_i ; i = 1,2,\dots,N\}$ rigidamente conectados entre si, a posição desse sistema dinâmico em um tempo t estará definida se soubermos as coordenadas de cada massa pontual em relação a um sistema de referências $(O_{(e)}; \mathbf{x}_{(e)})$ fixo no espaço. Consideremos também um segundo sistema coordenado $(O_{(c)}; \mathbf{x}_{(c)})$ rigidamente conectado ao agregado de “pontos

²A motivação explícita de Lagrange era fazer na *Mecânica* o mesmo que a *Geometria Analítica* fizera na *Geometria*.

materiais”: em relação a esse sistema o vetor posição $\{\mathbf{x}_{(c)}^i; i = 1,2,\dots,N\}$ de cada “ponto material” está obviamente definido e é invariante no tempo.

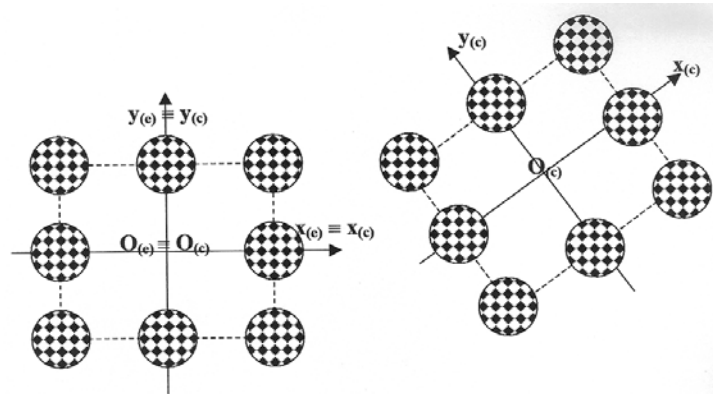


FIG.(1.1): Agregado de “pontos materiais” rigidamente conectados. (Sistema Espacial: $(O_{(e)}; \mathbf{x}_{(e)})$; Sistema Fixo no Corpo: $(O_{(c)}; \mathbf{x}_{(c)})$).

As coordenadas $\mathbf{x}_{(c)}$ do vetor posição de um ponto do espaço em relação ao sistema fixo no corpo relacionam-se com as coordenadas $\mathbf{x}_{(e)}$ em relação ao sistema fixo no espaço através da relação,

$$\mathbf{x}_{(e)}(t) = \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{x}_{(c)}, \quad (1.1a)$$

onde $\mathbf{x}_o(t)$ é o vetor posição da origem $O_{(c)}$ em relação ao sistema fixo no espaço e $\mathbf{T}(t)$ é a *matriz de transformação*, que transforma as coordenadas “locais” $\mathbf{x}_{(c)}$ nas coordenadas “globais” $\mathbf{x}_{(e)}$, descontado o deslocamento $\mathbf{x}_o(t)$ da origem. Por exemplo, uma rotação de um ângulo $\theta(t)$ no plano $(x_{(e)}, y_{(e)})$, ver Fig.(1.2), é representada pela matriz,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.1b)$$

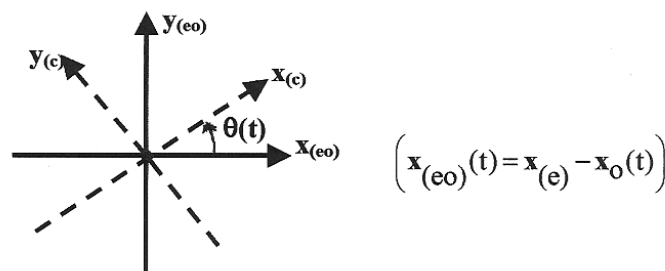


FIG.(1.2): Rotação de um ângulo $\theta(t)$ no plano $(x_{(eo)}, y_{(eo)})$.

que leva $\mathbf{x}_{(c)} \rightarrow \mathbf{x}_{(eo)} = \mathbf{x}_{(e)} - \mathbf{x}_o(t)$. Como os dois sistemas coordenados $\mathbf{x}_{(eo)}$ e $\mathbf{x}_{(c)}$ são cartesianos, a matriz de transformação $\mathbf{T}(t)$ tem uma estrutura particular. De fato, sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} dois vetores arbitrários com coordenadas $\{(u_i; v_i); i = 1, 2, 3\}$ em relação a um sistema coordenado cartesiano. O *produto escalar* desses dois vetores é definido por (\mathbf{u} : vetor coluna e \mathbf{u}^t : vetor linha na notação matricial)

$$\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i \quad (1.2a)$$

e é um *invariante*, isso é, não depende do sistema coordenado utilizado. Sejam agora $\{\mathbf{u}_{(eo)}; \mathbf{v}_{(eo)}\}$ as coordenadas desses vetores no sistema $\mathbf{x}_{(eo)}$ e $\{\mathbf{u}_{(c)}; \mathbf{v}_{(c)}\}$ no sistema $\mathbf{x}_{(c)}$; portanto

$$\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_{(c)}^t \cdot \mathbf{v}_{(c)} = \mathbf{u}_{(eo)}^t \cdot \mathbf{v}_{(eo)} = \mathbf{u}_{(c)}^t \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_{(c)}$$

e assim

$$\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{T}^t = \mathbf{T}^{-1}. \quad (1.2b)$$

Matrizes que satisfazem (1.2b) são denominadas *matrizes ortogonais* e quando são de ordem (3x3), como no caso em análise, representam sempre uma *rotação de corpo rígido*. Mais especificamente, é possível mostrar, como veremos a seguir, que existe sempre um sistema cartesiano definido por versores ortogonais $\{\mathbf{e}_{\theta, R}; \mathbf{e}_{\theta, I}; \mathbf{e}_{\perp}\}$ onde a matriz \mathbf{T} adquire a *forma canônica* (1.1b). Em (1.1b) o eixo de rotação coincide com o versor \mathbf{k} que se mantém invariante pela ação de \mathbf{T} : $\mathbf{T} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$; de forma genérica, a procura de um “*eixo de rotação*” \mathbf{e}_{\perp} tal que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{e}_{\perp}$ leva naturalmente ao *problema de valor característico*

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x}; \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^* &= \lambda^* \cdot \mathbf{x}^*, \end{aligned} \quad (1.3a)$$

onde $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + i\mathbf{x}_I$ são em geral complexos e (*) indica o complexo conjugado. Definindo

$$\begin{aligned} \circ \quad |\lambda| &= \sqrt{\lambda \lambda^*}; \\ \circ \quad \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{x}; \mathbf{x}^* \rangle}, \end{aligned} \quad (1.3b)$$

de (1.3a) segue, com o auxílio de (1.2b),

$$|\lambda|^2 \cdot \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \lambda \mathbf{x}; \lambda^* \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}; \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^* \rangle = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x})^t \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^*) = \\ = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x}^* = \|\mathbf{x}\|^2,$$

e portanto, como $\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}$, necessariamente

$$|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow (\lambda = \pm 1; \lambda = e^{\pm i\theta}). \quad (1.4a)$$

Observando que $\det(\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T}) = \det \mathbf{T}^t \cdot \det \mathbf{T} = (\det \mathbf{T})^2$, e portanto $\det \mathbf{T} = \pm 1$, as raízes do *polinômio característico*³ $p(\lambda)$,

$$p(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{T}) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3; \\ a_3 = - \det \mathbf{T} = \mp 1, \quad (1.4b)$$

definem os *valores característicos* λ de (1.3a). O polinômio cúbico (1.4b), com coeficientes reais $\{a_1; a_2; a_3\}$, tem necessariamente uma raiz real $\lambda = \pm 1$ e duas raízes complexas conjugadas⁴ $\{\lambda = e^{i\theta}; \lambda = e^{-i\theta}\}$. É óbvio que se $\{\lambda; \mathbf{x}\}$ for uma dupla de valor-vetor característico de \mathbf{T} então $\{-\lambda; \mathbf{x}\}$ será também uma dupla de valor-vetor característico de $-\mathbf{T}$: as matrizes \mathbf{T} e $-\mathbf{T}$ representam fisicamente a *mesma* rotação de corpo rígido, a única diferença sendo que os *eixos de rotação* apontam em direções opostas, de acordo com o sinal de $\lambda_1 = +1$ ou $\lambda_1 = -1$: trocando o sinal de (1.1b), por exemplo, a mesma rotação é observada em relação ao eixo $-\mathbf{k}$ invertendo a medida da rotação de $\theta \rightarrow \theta + \pi$. Dessa maneira pode-se escolher ou \mathbf{T} ou $-\mathbf{T}$ para definir uma dada rotação e a seguinte convenção⁵ é adotada: as *matrizes ortogonais de rotação* são as matrizes (3x3) ortogonais com $\det \mathbf{T} = +1$ e nessa classe de matrizes o polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 2 \cos \theta \cdot \lambda + 1); \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (1.5a)$$

Sejam agora $\{\lambda = 1; \mathbf{x} = \mathbf{e}_\perp\}$ e $\{\lambda = e^{\pm i\theta}; \mathbf{x} = \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_{\theta,R} \pm i \mathbf{e}_{\theta,I}\}$ os valores-vetores característicos de \mathbf{T} . Como, por definição, $\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}$, tem-se $\mathbf{e}_\theta = (\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{T}^t \cdot (\mathbf{T} \mathbf{e}_\theta) = e^{\pm i\theta} \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{e}_\theta$ e portanto

³ Veja que $p(0) = - \det \mathbf{T} = a_3$.

⁴ Para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ essas raízes complexas conjugadas transformam-se nas raízes duplas $\{\lambda = \pm 1\}$.

⁵ Como será visto mais adiante, essa *convenção* não é arbitrária: há uma distinção fundamental entre ambas quando se representa a derivada de $\mathbf{T}(t)$ em relação ao tempo por um *vetor* identificado com a *velocidade angular* do corpo rígido.

$$\begin{aligned} \text{i) } \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\perp &= \mathbf{e}_\perp; & \text{iii) } \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{e}_\perp &= \mathbf{e}_\perp; \\ \text{ii) } \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\theta &= e^{\pm i\theta} \cdot \mathbf{e}_\theta; & \text{iv) } \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{e}_\theta &= e^{\mp i\theta} \cdot \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (1.5b)$$

Multiplicando i) à esquerda por \mathbf{e}_θ^t e iv) à esquerda por \mathbf{e}_\perp^t e subtraindo uma da outra obtém-se ($\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_{\theta,R} \pm i \mathbf{e}_{\theta,I}$)

$$(1 - e^{\mp i\theta}) \langle \mathbf{e}_\perp; \mathbf{e}_{\theta,R} \pm i \mathbf{e}_{\theta,I} \rangle = 0,$$

indicando que \mathbf{e}_\perp é ortogonal aos vetores $\{\mathbf{e}_{\theta,R}; \mathbf{e}_{\theta,I}\}$. Multiplicando ii) e iv) à esquerda por \mathbf{e}_θ^t e subtraindo conclui-se que

$$\langle \mathbf{e}_\theta; \mathbf{e}_\theta \rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} \circ \|\mathbf{e}_{\theta,R}\| = \|\mathbf{e}_{\theta,I}\|; \\ \circ \langle \mathbf{e}_{\theta,R}; \mathbf{e}_{\theta,I} \rangle = 0. \end{cases}$$

Definindo $\|\mathbf{e}_{\theta,R}\| = \|\mathbf{e}_{\theta,I}\| = 1$, os versores $\{\mathbf{e}_{\theta,R}; \mathbf{e}_{\theta,I}; \mathbf{e}_\perp\}$ formam uma *base ortonormal* e são tais que (ver (1.5b))

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\theta,R} &= \cos \theta \mathbf{e}_{\theta,R} - \sin \theta \mathbf{e}_{\theta,I}; \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\theta,I} &= \sin \theta \mathbf{e}_{\theta,R} + \cos \theta \mathbf{e}_{\theta,I}; \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\perp &= \mathbf{e}_\perp; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_{\theta,R}; \mathbf{e}_{\theta,I}; \mathbf{e}_\perp)}. \quad (1.5c)$$

Na dinâmica de corpo rígido a matriz \mathbf{T} varia com o tempo e o versor $\mathbf{e}_\perp(t)$ define o *eixo instantâneo de rotação* do corpo. Dado qualquer vetor \mathbf{u} submetido à ação de \mathbf{T} a componente de \mathbf{u} na direção de \mathbf{e}_\perp permanece invariante e a componente no plano perpendicular a \mathbf{e}_\perp roda de um ângulo θ , ver Fig. (1.2) e exercício (1.2).

1.2: VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Mantendo ainda a definição $\mathbf{x}_{(eo)}(t) = \mathbf{x}_{(e)}(t) - \mathbf{x}_o(t)$, consideremos a relação

$$\mathbf{x}_{(eo)}(t) = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{x}_{(c)}(t) \Leftrightarrow \mathbf{x}_{(c)}(t) = \mathbf{T}^t(t) \cdot \mathbf{x}_{(eo)}(t), \quad (1.6a)$$

entre as coordenadas de um ponto arbitrário $\mathbf{x}(t)$ em relação ao sistema “fixo” no espaço e fixo no corpo. Esse ponto no espaço desloca-se no tempo com velocidade e aceleração dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{(eo)}(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{x}}_{(eo)}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{(c)}(\mathbf{t}) + \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}_{(c)}(\mathbf{t}); \\ \mathbf{a}_{(eo)}(\mathbf{t}) &= \ddot{\mathbf{x}}_{(eo)}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(\mathbf{t}) \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{(c)}(\mathbf{t}) + 2\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{(c)}(\mathbf{t}) + \ddot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}_{(c)}(\mathbf{t}),\end{aligned}\tag{1.6b}$$

em relação ao sistema “fixo” no espaço; em relação ao sistema fixo no corpo tem-se (ver (1.6a))

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{(c)}(\mathbf{t}) &= \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}_{(eo)}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{x}}_{(c)}(\mathbf{t}) + \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}_{(c)}(\mathbf{t}); \\ \mathbf{a}_{(c)}(\mathbf{t}) &= \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{a}_{(eo)}(\mathbf{t}) = \ddot{\mathbf{x}}_{(c)}(\mathbf{t}) + 2\mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{(c)}(\mathbf{t}) + \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \ddot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}_{(c)}(\mathbf{t}).\end{aligned}\tag{1.6c}$$

Da ortogonalidade da matriz $\mathbf{T}(\mathbf{t})$ tem-se $\mathbf{T}^t(\mathbf{t}) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t})$ e segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{t}) = \mathbf{I} &\Rightarrow \dot{\mathbf{T}}^t(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{t}) + \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\Omega}_{(c)} = \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = -\boldsymbol{\Omega}_{(c)}^t; \\ \mathbf{T}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) = \mathbf{I} &\Rightarrow \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) + \mathbf{T}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{T}}^t(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\Omega}_{(e)} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{T}^t(\mathbf{t}) = -\boldsymbol{\Omega}_{(e)}^t,\end{aligned}\tag{1.7a}$$

e portanto $\{\boldsymbol{\Omega}_{(c)}; \boldsymbol{\Omega}_{(e)}\}$ são *matrizes*⁶ *anti-simétricas*,

$$\boldsymbol{\Omega}_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{c,z} & \Omega_{c,y} \\ \Omega_{c,z} & 0 & -\Omega_{c,x} \\ -\Omega_{c,y} & \Omega_{c,x} & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega}_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{e,z} & \Omega_{e,y} \\ \Omega_{e,z} & 0 & -\Omega_{e,x} \\ -\Omega_{e,y} & \Omega_{e,x} & 0 \end{bmatrix},\tag{1.7b}$$

satisfazendo a relação de transformação

$$\boldsymbol{\Omega}_{(e)}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{(c)}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{T}^t(\mathbf{t}).\tag{1.7c}$$

Em um espaço tri-dimensional – e somente aí – o número de termos não-nulos de uma matriz anti-simétrica iguala a dimensão do espaço e a matriz anti-simétrica pode então ser identificada com um vetor. Nessa situação, se $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ e $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ forem, respectivamente, os versores do sistema coordenado fixo no corpo e no espaço, os *vetores* $\{\boldsymbol{\omega}_{(c)}; \boldsymbol{\omega}_{(e)}\}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{(c)} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_{(c)} = \Omega_{c,x} \mathbf{e}_x + \Omega_{c,y} \mathbf{e}_y + \Omega_{c,z} \mathbf{e}_z; \\ \boldsymbol{\Omega}_{(e)} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_{(e)} = \Omega_{e,x} \mathbf{i} + \Omega_{e,y} \mathbf{j} + \Omega_{e,z} \mathbf{k},\end{aligned}\tag{1.7d}$$

⁶ Deveríamos dizer, em uma linguagem mais técnica, que o *operador* “rotação de corpo rígido” é definido por um *tensor anti-simétrico*, representado pelas *matrizes anti-simétricas* $\{\boldsymbol{\Omega}_{(c)}; \boldsymbol{\Omega}_{(e)}\}$ nos sistemas de coordenadas fixo no corpo e no espaço, respectivamente.

definem a *rotação de corpo rígido*: de fato, supondo $\dot{\mathbf{x}}_{(c)} = \mathbf{0}$ em (1.6b,c) tem-se

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{v}_{(c)} &= \mathbf{\Omega}_{(c)} \cdot \mathbf{x}_{(c)} = \boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{x}_{(c)}; \\ \circ \mathbf{v}_{(e)} &= \mathbf{\Omega}_{(e)} \cdot \mathbf{x}_{(e)} = \boldsymbol{\omega}_{(e)} \wedge \mathbf{x}_{(e)}, \end{aligned} \quad (1.8a)$$

o *produto vetorial* entre vetores podendo ser calculado pelo algoritmo⁷ clássico

$$\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{x}_{(c)} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega_{c,x} & \omega_{c,y} & \omega_{c,z} \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}_{(e)} \wedge \mathbf{x}_{(e)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{e,x} & \omega_{e,y} & \omega_{e,z} \\ x_e & y_e & z_e \end{vmatrix}. \quad (1.8b)$$

O vetor $\boldsymbol{\omega}$, com componentes $\boldsymbol{\omega}_{(c)}$ em relação ao sistema fixo no corpo e $\boldsymbol{\omega}_{(e)}$ em relação ao sistema fixo no espaço, é denominado *vetor velocidade angular* do corpo rígido mas há um ponto aí que necessita ser esclarecido: se $\boldsymbol{\omega}$ fosse de fato um vetor deveríamos ter sempre $\boldsymbol{\omega}_{(e)} = \mathbf{T}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(c)}$, qualquer que fosse a matriz ortogonal de transformação $\mathbf{T}(t)$; no entanto, como discutido no exercício (1.3), essa regra de transformação só é compatível com (1.7c) quando $\det \mathbf{T}(t) = +1$. Ou, em outras palavras, o *tensor anti-simétrico* $\mathbf{\Omega}$ pode ser identificado com um *vetor de rotação* $\boldsymbol{\omega}$ somente na sub-classe das transformações representadas por *matrizes ortogonais de rotação*.

O *vetor velocidade angular* não é, senso estrito, um vetor – em uma linguagem informal é designado por *pseudo-vetor*, pois se comporta como um vetor somente para uma classe bem definida de transformações. As regras práticas usuais, como a “regra do saca-rolha” ou a “regra da mão direita”, aparecem na definição desses pseudo-vetores e do *produto vetorial* para garantir que as transformações permitidas obedecem sempre a condição $\det \mathbf{T} = +1$, como exigido para que esses tensores anti-simétricos possam ser representados por vetores.

De (1.7a) segue também

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{\Omega}_{(c)}(t) \Rightarrow \ddot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t) \cdot \dot{\mathbf{\Omega}}_{(c)}(t) + \dot{\mathbf{T}}(t) \cdot \mathbf{\Omega}_{(c)}(t) \quad (1.8c)$$

e portanto

$$\mathbf{T}^t(t) \cdot \ddot{\mathbf{T}}(t) = \dot{\mathbf{\Omega}}_{(c)} + \mathbf{\Omega}_{(c)}^2. \quad (1.8c)$$

Utilizando essas expressões em (1.6c) a *fórmula cinemática*

⁷ O *produto vetorial* é definido por (1.8a) e representa uma operação entre vetores gerando um novo vetor; o algoritmo fornece só um procedimento mnemônico para determinar o vetor resultante.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \frac{D\mathbf{x}_{(c)}}{Dt} = \frac{d\mathbf{x}_{(c)}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{x}_{(c)}; \\
\mathbf{a}(t) &= \frac{D\mathbf{v}_{(c)}}{Dt} = \frac{d\mathbf{v}_{(c)}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{v}_{(c)},
\end{aligned}
\tag{1.9a}$$

pode ser derivada. A variação *global* $D\mathbf{f}/Dt$ da propriedade $\mathbf{f}(t)$, identificada por $\{\mathbf{x}_{(c)}(t); \mathbf{v}_{(c)}(t)\}$ em (1.9a), é dada pela soma de duas parcelas: a primeira, $d\mathbf{f}/dt$, toma conta da variação *local* de $\mathbf{f}(t)$ supondo o sistema fixo no corpo $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ *congelado* no tempo; a segunda, $\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{f}$, indica a variação de $\mathbf{f}(t)$ que se observa não por uma mudança de suas coordenadas mas pela *rotação* dos eixos coordenados fixos no corpo.

Como um exemplo de aplicação de (1.9a), seja a matriz $\mathbf{T}(t)$ expressa na forma canônica (1.1b) – ou (1.5c) – e $\{\mathbf{e}_x = \cos \alpha(t) \mathbf{i} + \sin \alpha(t) \mathbf{j}; \mathbf{e}_y = -\sin \alpha(t) \mathbf{i} + \cos \alpha(t) \mathbf{j}\}$ os versores do sistema fixo no corpo no plano (x,y); definindo

$$\left. \begin{aligned}
\circ \mathbf{x}_{(c)} &= r(t)\mathbf{e}_x; \\
\circ \boldsymbol{\omega}_{(c)} &= \dot{\alpha}(t)\mathbf{e}_z;
\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
\circ \mathbf{v}_{(c)} &= \dot{r}\mathbf{e}_x + \dot{\alpha}r\mathbf{e}_y; \\
\circ \mathbf{a}_{(c)} &= (\ddot{r} - \dot{\alpha}^2 r)\mathbf{e}_x + (2\dot{\alpha}\dot{r} + \ddot{\alpha}r)\mathbf{e}_y,
\end{aligned} \right.$$

com $-\dot{\alpha}^2 r$ sendo a *aceleração centrípeta* e $2\dot{\alpha}\dot{r}$ a *aceleração de Coriolis*.

De outro lado, se $\mathbf{x}_{(c)}$ representar as coordenadas de um ponto no corpo rígido então $\mathbf{x}_{(c)} = \text{cte.}$; utilizando (1.9a) e observando a definição $\mathbf{x}_{(eo)} = \mathbf{x}_{(e)} - \mathbf{x}_o(t)$, a velocidade e aceleração de pontos no corpo rígido são descritas pelas funções vetoriais

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_o + \boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{x}_{(c)}; \\
\mathbf{a}(t) &= \ddot{\mathbf{x}}_o + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{(c)}}{dt} \wedge \mathbf{x}_{(c)} + \boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{x}_{(c)}).
\end{aligned}
\tag{1.9b}$$

Por conveniência descrevemos em (1.9b) as funções vetoriais $\{\mathbf{v}(t); \mathbf{a}(t)\}$ de uma forma híbrida no que toca as componentes: o vetor $\mathbf{x}_o(t)$ representa as coordenadas da origem do sistema fixo no corpo em relação ao *sistema fixo no espaço*; os vetores $\{\boldsymbol{\omega}_{(c)}; \mathbf{x}_{(c)}\}$ representam a velocidade angular e vetor posição em relação ao *sistema fixo no corpo*. Essa dicotomia na representação parece natural: a posição $\mathbf{x}_o(t)$ da origem do sistema fixo no corpo deve ser dada em relação ao *sistema espacial*; de outro lado, o movimento de rotação depende da distribuição de massa no

corpo, que permanece invariante no tempo quando esse movimento é representado em relação ao *sistema de referências fixo no corpo*; sendo mais específico, em (1.9b)

$$\begin{aligned}
\circ \mathbf{x}_o(t) &= x_{e,o}(t)\mathbf{i} + y_{e,o}(t)\mathbf{j} + z_{e,o}(t)\mathbf{k}; \\
\circ \mathbf{x}_{(c)} &= x_c\mathbf{e}_x + y_c\mathbf{e}_y + z_c\mathbf{e}_z; \\
\circ \boldsymbol{\omega}_{(c)}(t) &= \omega_{c,x}(t)\mathbf{e}_x + \omega_{c,y}(t)\mathbf{e}_y + \omega_{c,z}(t)\mathbf{e}_z,
\end{aligned} \tag{1.9c}$$

onde $\{\mathbf{i};\mathbf{j};\mathbf{k}\}$ é a base do sistema espacial e $\{\mathbf{e}_x;\mathbf{e}_y;\mathbf{e}_z\}$ é a base do sistema fixo no corpo.

Como mostra (1.9b), a *velocidade* em qualquer ponto do corpo rígido está univocamente determinada se as *três* componentes da velocidade da origem $O_{(c)}$ forem conhecidas assim como as *três* componentes da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{(c)}$; o *corpo rígido* tem portanto *seis graus de liberdade* e os vetores velocidade $\{\dot{\mathbf{x}}_o(t);\boldsymbol{\omega}_{(c)}(t)\}$ são determinados pelas *equações dinâmicas*, discutidas na seção 2.

A mesma contagem de graus de liberdade pode ser obtida diretamente da definição (1.1a). De fato, se $\{\mathbf{t}_x(t); \mathbf{t}_y(t); \mathbf{t}_z(t)\}$ forem as coordenadas dos *vetores espaciais* $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ em relação à base $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ do sistema fixo no corpo, tem-se

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x(t) \\ \mathbf{t}_y(t) \\ \mathbf{t}_z(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^t(t) = [\mathbf{t}_x(t) \quad \mathbf{t}_y(t) \quad \mathbf{t}_z(t)], \tag{1.10a}$$

com $\{\mathbf{t}_x(t); \mathbf{t}_y(t); \mathbf{t}_z(t)\}$ satisfazendo as *seis* restrições escalares

$$\begin{aligned}
\circ \langle \mathbf{t}_x(t); \mathbf{t}_x(t) \rangle &= \langle \mathbf{t}_y(t); \mathbf{t}_y(t) \rangle = \langle \mathbf{t}_z(t); \mathbf{t}_z(t) \rangle = 1; \\
\circ \langle \mathbf{t}_x(t); \mathbf{t}_y(t) \rangle &= \langle \mathbf{t}_y(t); \mathbf{t}_z(t) \rangle = \langle \mathbf{t}_z(t); \mathbf{t}_x(t) \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{1.10b}$$

Portanto, das nove componentes de $\mathbf{T}(t)$ somente três são linearmente independentes – por exemplo, a diagonal principal $\lceil t_{xx}(t); t_{yy}(t); t_{zz}(t) \rceil$ de $\mathbf{T}(t)$ – e a posição $\mathbf{x}_{(c)}$ de um ponto arbitrário do corpo rígido estará univocamente definida se as *três* componentes do vetor posição $\mathbf{x}_o(t)$ e essas *três* componentes LI de $\mathbf{T}(t)$ forem conhecidas, somando os *seis* graus de liberdade do corpo rígido.

Como já dito, os vetores $\{\mathbf{x}_o(t);\boldsymbol{\omega}_{(c)}(t)\}$ são determinados pelas *equações dinâmicas* do movimento, que serão discutidas na próxima seção, e conhecido $\boldsymbol{\omega}_{(c)}(t)$ é um problema cinemático simples determinar $\mathbf{T}(t)$. De fato, de (1.8c) segue

$$\dot{\mathbf{T}}^t = -\boldsymbol{\Omega}_{(c)}(t) \cdot \mathbf{T}^t(t)$$

ou, com o auxílio de (1.10a),

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_x}{dt} &= -\boldsymbol{\omega}_{(c)}(t) \wedge \mathbf{t}_x(t); \\ \frac{d\mathbf{t}_y}{dt} &= -\boldsymbol{\omega}_{(c)}(t) \wedge \mathbf{t}_y(t); \\ \frac{d\mathbf{t}_z}{dt} &= -\boldsymbol{\omega}_{(c)}(t) \wedge \mathbf{t}_z(t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

É trivial verificar – ver exercício (1.4) – que a solução de (1.11) satisfaz as restrições (1.10b) para todo o tempo t e também não é difícil interpretar (1.11) no contexto da fórmula cinemática (1.9a); de fato

$$\frac{D\mathbf{i}}{Dt} = \frac{D\mathbf{t}_x}{Dt} = \frac{d\mathbf{t}_x}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_x \equiv \mathbf{0}.$$

A solução simultânea de (1.11) e da equação dinâmica que determina $\boldsymbol{\omega}_{(c)}(t)$ fornece a posição do corpo rígido em cada instante de tempo o que resolve, em tese ao menos, o problema proposto. Observa-se, no entanto, que se as *variáveis lineares* que determinam a translação $\mathbf{x}_o(t)$ estão definidas explicitamente o mesmo não ocorre em relação à rotação de corpo rígido: as três *variáveis angulares* que determinariam a posição do corpo não foram ainda identificadas de uma forma geometricamente clara. Muitas vezes essa identificação é importante e esse ponto será retomado no item (1.4); antes, porém, abriremos um curto parêntesis para discutir, de forma sucinta, alguns aspectos da álgebra do *produto vetorial*, introduzido na Física-Matemática justamente no estudo da rotação de um corpo rígido.

1.3: ÁLGEBRA DO PRODUTO VETORIAL

Dado um sistema ortonormal $\mathbf{i} = \{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ seja um sistema ortonormal $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ obtido a partir de \mathbf{i} pela transformação $\mathbf{e} = \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{i}$ onde \mathbf{T} é uma matriz ortogonal ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^t = \mathbf{I}$) com $\det \mathbf{T} = +1$. Seja também \mathbf{a} um vetor arbitrário; define-se

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.12a)$$

e introduz-se o *produto vetorial* pela operação

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{\Omega}_{(a)} \cdot \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}, \quad (1.12b)$$

a expressão à direita sendo o algoritmo usualmente utilizado para o cálculo do produto vetorial.

O produto vetorial tem uma álgebra peculiar: ele satisfaz a propriedade *distributiva* mas não satisfaz as propriedades *comutativa* e *associativa* do produto de escalares; especificamente

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &\neq \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} & : & \quad \mathbf{n\tilde{a}o} \text{ comutativa}; \\ \circ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &\neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} & : & \quad \mathbf{n\tilde{a}o} \text{ associativa}; \\ \circ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} & : & \quad \text{distributiva.} \end{aligned} \quad (1.12c)$$

A verificação de (1.12c) pode ser feita trivialmente. Por exemplo, é imediato verificar que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{\Omega}_{(a)} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{\Omega}_{(b)} \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ e portanto $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$; também, fazendo $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{e}_x$ e $\mathbf{c} = \mathbf{e}_y$ verifica-se que $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -\mathbf{e}_y$ ao passo que $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Na realidade, observando as expressões (ver (1.12b))

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \det \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

e

$$\mathbf{\Omega}_{(a)} \cdot \mathbf{\Omega}_{(b)} = \begin{bmatrix} b_x & 0 & 0 \\ 0 & b_y & 0 \\ 0 & 0 & b_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{I},$$

pode-se demonstrar que

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}; \\ \circ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}); \\ \circ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

As relações (1.13) são utilizadas nos exercícios e na seção 2 deste texto.

1.4: ÂNGULOS DE EULER

A matriz de transformação $\mathbf{T}(t)$, definida na forma (1.10a), pode ser reconstruída em qualquer instante do tempo pela integração de (1.11). Em algumas aplicações, no entanto, e também sob uma perspectiva mais conceitual, é conveniente que se definam variáveis angulares caracterizando os *três graus de liberdade* do movimento de *rotação* do corpo rígido.

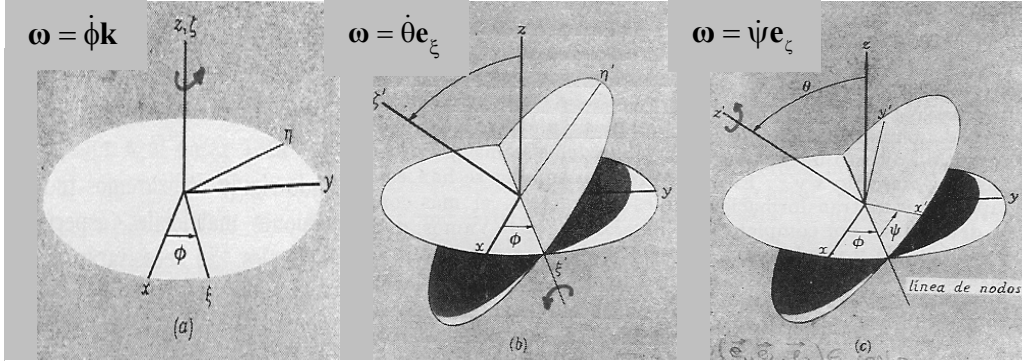


FIG.(1.3): Ângulos de Euler: Sistema “global” $\mathbf{x} = (x,y,z)$ e “local” $\mathbf{x}' = (x',y',z')$.
 $(\mathbf{\Omega}_\phi = \dot{\phi}\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{\Omega}_\theta = \dot{\theta}\mathbf{e}_\xi \Rightarrow \mathbf{\Omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{e}_\zeta)$

Seja assim, em seqüência, um giro de ϕ em relação ao eixo espacial z , transformando $\mathbf{x} \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$, seguido de um giro de θ em torno do eixo ξ , transformando $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (\xi, \eta', \zeta')$, e de um giro ψ em torno do eixo ζ' , transformando $(\xi, \eta', \zeta') \rightarrow \mathbf{x}'$. As matrizes de transformação de cada um desses giros são definidas pelas formas canônicas

$$\mathbf{T}_\phi^t = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{T}_\theta^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; \mathbf{T}_\psi^t = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.14a)$$

e como $\mathbf{T}^t = (\mathbf{T}_\psi)^t \cdot (\mathbf{T}_\theta)^t \cdot (\mathbf{T}_\phi)^t$ tem-se

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.14c)$$

As variáveis angulares (ϕ, θ, ψ) são os *ângulos de Euler* e definem uma (possível) tríade de variáveis independentes que caracterizam univocamente a posição do corpo rígido; observando as relações

$$(\mathbf{T}_\phi^t \cdot \dot{\mathbf{T}}_\phi) = \dot{\phi} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{T}_\theta^t \cdot \dot{\mathbf{T}}_\theta) = \dot{\theta} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{T}_\psi^t \cdot \dot{\mathbf{T}}_\psi) = \dot{\psi} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e também que

$$\boldsymbol{\Omega}_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^t \cdot \dot{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}_\psi^t \cdot \mathbf{T}_\theta^t \cdot \mathbf{T}_\phi^t) \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_\phi \cdot \mathbf{T}_\theta \cdot \mathbf{T}_\psi)$$

obtem-se

$$\boldsymbol{\Omega}_{(c)} = \mathbf{T}_\psi^t \cdot \mathbf{T}_\theta^t \cdot (\mathbf{T}_\phi^t \cdot \dot{\mathbf{T}}_\phi) \cdot \mathbf{T}_\theta \cdot \mathbf{T}_\psi + \mathbf{T}_\psi^t \cdot (\mathbf{T}_\theta^t \cdot \dot{\mathbf{T}}_\theta) \cdot \mathbf{T}_\psi + (\mathbf{T}_\psi^t \cdot \dot{\mathbf{T}}_\psi)$$

e portanto as seguintes relações são obtidas entre os ângulos de Euler e as componentes do vetor $\boldsymbol{\omega}$ em relação ao sistema coordenado fixo no corpo:

$$\begin{aligned} \circ \omega_1 &= \dot{\theta} \cdot \cos \psi + \dot{\phi} \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta; & \circ \dot{\theta} &= \omega_1 \cdot \cos \psi - \omega_2 \cdot \sin \psi; \\ \circ \omega_2 &= -\dot{\theta} \cdot \sin \psi + \dot{\phi} \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta; & \circ \dot{\phi} &= (\omega_1 \cdot \sin \psi + \omega_2 \cdot \cos \psi) \sin \theta + \omega_3 \cdot \cos \theta; \\ \circ \omega_3 &= \dot{\phi} \cdot \cos \theta + \dot{\psi}; & \circ \dot{\psi} &= (\omega_3 - \omega_1 \cdot \sin \psi - \omega_2 \cdot \cos \psi) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

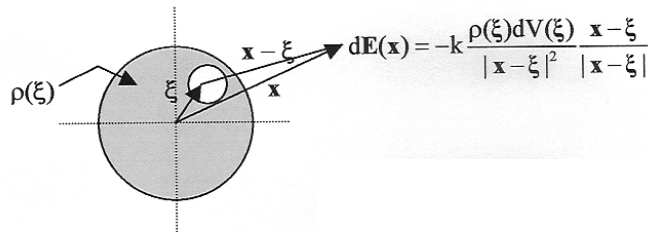
Essas relações serão utilizadas no capítulo 3 no estudo da dinâmica dos peões.

* * *

1.5: EXERCÍCIOS

1.1: (*Massa Pontual – Campo Gravitacional*) “Massa atrai massa na razão direta das massas e do inverso do quadrado da distância” – essa é a consagrada *lei da gravitação* de Newton. Considere a força gravitacional causada por uma certa distribuição de massa com densidade $\rho(\xi)$ em um volume V ; o *campo gravitacional* $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ é igual à força exercida por essa distribuição de massa em uma massa unitária colocada no ponto \mathbf{x} . Pede-se:

a) Mostrar que esse campo é dado por $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -k \int_V \rho(\xi) \frac{\mathbf{x} - \xi}{|\mathbf{x} - \xi|^3} dV(\xi)$;



b) Mostrar que para $\mathbf{x} \notin V$ tem-se $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$. (Utilizar a expressão

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -k \int_V \rho(\xi) \left[\nabla_{(\mathbf{x})} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \xi}{|\mathbf{x} - \xi|^3} \right) \right] dV(\xi),$$

onde $\nabla_{(\mathbf{x})}$ é a divergência em relação a \mathbf{x});

c) Se $\mathbf{x} \in V$, seja V_ε uma pequena esfera de raio ε e centro em \mathbf{x} . Mostrar que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -k\rho(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{V_\varepsilon} \left[\nabla_{(\mathbf{x})} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \xi}{|\mathbf{x} - \xi|^3} \right) \right] dV(\xi) \right\}.$$

Seja $0 \leq r \leq \varepsilon$ a coordenada radial na esfera V_ε ; observando as identidades

$$\nabla_{(\mathbf{x})} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \xi}{|\mathbf{x} - \xi|^3} \right) = \nabla_{(\xi)} \cdot \left(\frac{\xi - \mathbf{x}}{|\xi - \mathbf{x}|^3} \right); \quad \xi - \mathbf{x} = r\mathbf{e}_r,$$

mostrar, com o auxílio do *teorema da divergência*, que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -k \cdot 4\pi\rho(\mathbf{x}) \text{ se } \mathbf{x} \in V;$$

d) Supondo que V seja uma esfera de raio r_0 e considerando um sistema coordenado com origem no *centro da esfera* sejam

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \mathbf{e}_r = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k}. \end{cases}$$

Supondo também que $\rho = \rho(r)$ – isso é, que a densidade do meio varie somente na direção radial – justificar a expressão

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E(r)\mathbf{e}_r;$$

e) Considerando duas calotas esféricas com raios r e $r + \Delta r$ e a região ΔV contida entre elas, utilizar o *teorema da divergência* para mostrar, no limite $\Delta r \rightarrow 0$, a relação

$$\text{Se } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = E(r)\mathbf{e}_r \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E(r));$$

f) Mostrar que para uma esfera com densidade $\rho(r)$ e massa M tem-se

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -k \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \text{ para } |\mathbf{x}| > r_0. \text{ (} r_0 \text{: raio da esfera)}$$

Ou, em outras palavras: o campo gravitacional causado por uma esfera de massa M e densidade que varia somente radialmente é idêntico ao de uma *massa pontual* M colocada no centro da esfera. Esse resultado depende diretamente da relação $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \propto 1/r^2$. Verifique que, em larga medida, a teoria da gravitação apresentaria “anomalias” se a força entre corpos não fosse exatamente proporcional ao inverso do quadrado da distância; por exemplo, $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \infty$ para $\mathbf{x} \in V$ se essa força fosse proporcional a $1/r^{2+\alpha}$ com $0 < \alpha \ll 1$.

Nota: Em 1798 Lord Cavendish realizou experimentos com molas de torção confirmando a relação $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \propto 1/r^2$ dentro do erro experimental; ele mesmo já havia verificado antes, em 1772, a mesma relação para a Lei de Coulomb da eletrostática. Na realidade, sabe-se hoje que o expoente 2 está aí correto com erro da ordem $1:10^9$ até distâncias da ordem de 10^{-13} cm, da ordem do *raio de Bohr do átomo*, ver Jackson (1975) “*Classical Electrodynamics*”.

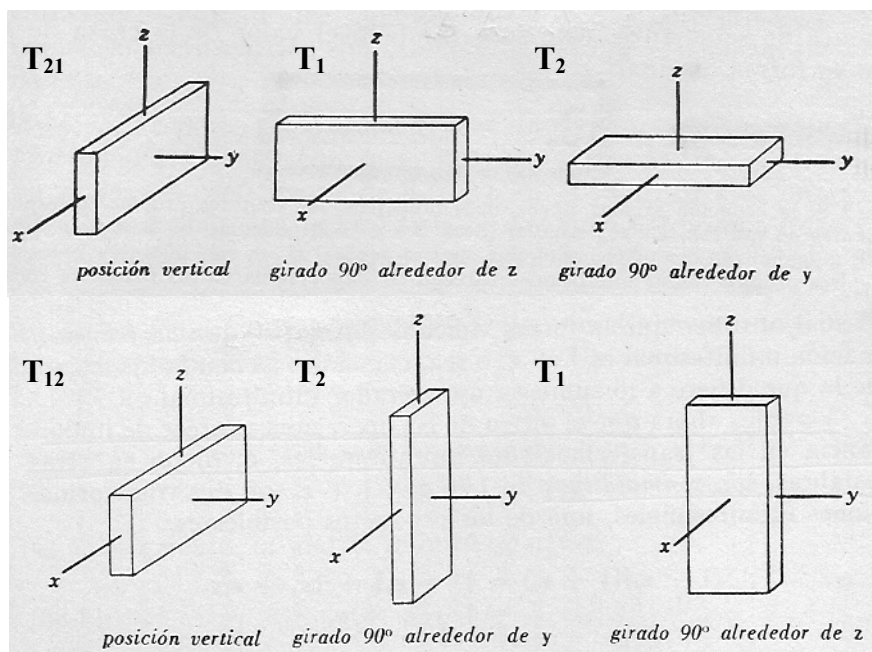
* * *

1.2: (*Matriz Ortogonal de Rotação*) Considere a base ortonormal $\{\mathbf{e}_{0,R}; \mathbf{e}_{0,I}; \mathbf{e}_\perp\}$ onde a matriz ortogonal \mathbf{T} é representada pela forma canônica (1.5c) e seja $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + u_\perp \mathbf{e}_\perp$ um vetor arbitrário, com \mathbf{u}_0 sendo a componente no plano $\{\mathbf{e}_{0,R}; \mathbf{e}_{0,I}\}$. Pede-se:

- a) Mostrar que o vetor $\mathbf{v}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_0$ corresponde a um giro de um ângulo θ do vetor \mathbf{u}_0 ;
- b) Sejam \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 as matrizes de rotação associadas a um giro de 90° ao redor dos eixos z e y , respectivamente. Mostrar que

$$\mathbf{T}_{21} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

c) Utilizando a forma (1.10a) visualizar geometricamente essas duas transformações e discutir o esquema apresentado na figura abaixo⁸



Nota: O esquema apresentado nessa figura pode ser entendido como uma visualização geométrica da *não-comutatividade* do produto de matrizes ($\mathbf{T}_{21} \neq \mathbf{T}_{12}$).

* * *

⁸ Ver H. Goldstein (1966), "*Mecânica Clásica*".

1.3: (Pseudo-Vetor) Considerando a matriz \mathbf{T} e \mathbf{T}^t nas formas (1.10a) pede-se:

a) Com o auxílio de (1.7c,d) mostrar que

$$\boldsymbol{\Omega}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_x) & \mathbf{t}_x \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_y) & \mathbf{t}_x \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_z) \\ \mathbf{t}_y \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_x) & \mathbf{t}_y \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_y) & \mathbf{t}_y \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_z) \\ \mathbf{t}_z \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_x) & \mathbf{t}_z \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_y) & \mathbf{t}_z \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(c)} \wedge \mathbf{t}_z) \end{bmatrix};$$

b) Utilizando a expressão de $\boldsymbol{\omega}_{(e)}$ dada em (1.7d) verificar a igualdade (ver (1.13))

$$\boldsymbol{\omega}_{(e)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_y \wedge \mathbf{t}_z) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(c)} \\ (\mathbf{t}_z \wedge \mathbf{t}_x) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(c)} \\ (\mathbf{t}_x \wedge \mathbf{t}_y) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(c)} \end{bmatrix};$$

c) Observando que $\{\mathbf{t}_x; \mathbf{t}_y; \mathbf{t}_z\}$ é uma *base ortonormal*, utilizar a identidade $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ para mostrar que

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_y \wedge \mathbf{t}_z) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(e)} &= [\mathbf{t}_x \cdot (\mathbf{t}_y \wedge \mathbf{t}_z)] \boldsymbol{\omega}_{(c)} = (\det \mathbf{T}) \boldsymbol{\omega}_{(c)}; \\ (\mathbf{t}_z \wedge \mathbf{t}_x) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(e)} &= [\mathbf{t}_y \cdot (\mathbf{t}_z \wedge \mathbf{t}_x)] \boldsymbol{\omega}_{(c)} = (\det \mathbf{T}) \boldsymbol{\omega}_{(c)}; \\ (\mathbf{t}_x \wedge \mathbf{t}_y) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(e)} &= [\mathbf{t}_z \cdot (\mathbf{t}_x \wedge \mathbf{t}_y)] \boldsymbol{\omega}_{(c)} = (\det \mathbf{T}) \boldsymbol{\omega}_{(c)}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\boldsymbol{\omega}_{(e)} = (\det \mathbf{T}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_z \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(c)} = (\det \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(c)}.$$

Por que o pseudo-vetor $\boldsymbol{\omega}$, que define a *velocidade angular* do corpo rígido, só se comporta como vetor quando $\det \mathbf{T} = +1$?

* * *

1.4: Considerar a equação (1.11) com condições iniciais $\{\mathbf{t}_x(0) = \mathbf{t}_{x,o}; \mathbf{t}_y(0) = \mathbf{t}_{y,o}; \mathbf{t}_z(0) = \mathbf{t}_{z,o}\}$. Mostrar que a solução $\{\mathbf{t}_x(t); \mathbf{t}_y(t); \mathbf{t}_z(t)\}$ de (1.11) necessariamente satisfará as restrições (1.10b) para todo $t > 0$ se os valores iniciais $\{\mathbf{t}_{x,o}; \mathbf{t}_{y,o}; \mathbf{t}_{z,o}\}$ satisfizerem.

* * *

2. DINÂMICA DE CORPO RÍGIDO

Uma das intenções desse texto é, como já dito no início da primeira seção, realizar uma transição “contínua” da dinâmica Newtoniana dos “pontos materiais” para a dinâmica dos “corpos extensos”, considerados rígidos em primeira aproximação.

No estudo da *cinemática* utilizamos, para efeito ilustrativo, um agregado rígido de partículas pontuais com o intuito de introduzir o sistema de referências fixo no “corpo”, isso é, no “agregado”, mas todo o desenvolvimento cinemático passa ao largo dessa peculiaridade do corpo rígido: ele é geral, vale tanto para um agregado rígido de partículas como para um sólido rígido, pois trata somente da relação entre dois sistemas de referências, um fixo no espaço e outro no “corpo”. É na presente seção, como veremos, que o estudo do “agregado rígido de partículas” permite, com o auxílio do *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, uma transição contínua da mecânica dos “pontos materiais” para a mecânica dos “corpos extensos”.

2.1: AGREGADO RÍGIDO DE PARTÍCULAS – FORÇAS DE VÍNCULO

Consideremos, como na seção anterior, um conjunto de N “pontos materiais” com massas $\{m_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ localizadas nos pontos $\{\mathbf{x}_{(e)}^i(t); i = 1, 2, \dots, N\}$ do espaço. Esse conjunto de “pontos materiais” define um “agregado rígido de partículas” quando a distância entre eles permanece invariante no tempo ou

$$l_{ij} = \|\mathbf{x}_{(e)}^i(t) - \mathbf{x}_{(e)}^j(t)\| = \text{cte.}; (i, j) = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1a)$$

Os *vínculos* (2.1) podem ser imaginados como oriundos de “barras rígidas” de massas desprezíveis unindo os pontos materiais (i) e (j) e sujeitas a forças de tração (ou compressão): na Mecânica Newtoniana as *ações* desses vínculos são descritas por *forças* iguais e de sinais opostos agindo na direção da “barra rígida”, como esquematicamente indicado na Fig.(2.1).

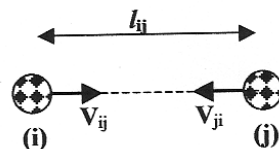


FIG.(2.1): Forças de vínculo no agregado rígido de partículas.

Dessa maneira, as *forças de vínculo* podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{V}_{ij}^{(e)}(t) &= \Lambda_{ij}(t) \cdot (\mathbf{x}_{(e)}^j(t) - \mathbf{x}_{(e)}^i(t)); \\ \circ \mathbf{V}_{ji}^{(e)}(t) &= \Lambda_{ji}(t) \cdot (\mathbf{x}_{(e)}^i(t) - \mathbf{x}_{(e)}^j(t)), \end{aligned} \quad \left(\Lambda_{ij}(t) = \Lambda_{ji}(t); \Lambda_{ii}(t) = 0 \right) \quad (2.1b)$$

e se $\{\mathbf{F}_i(t); i = 1, 2, \dots, N\}$ forem as forças externas (conhecidas) aplicadas nos “pontos materiais”, as equações de Newton do movimento ficam dadas por ($\mathbf{V}_{ii}(t) \equiv \mathbf{0}$)

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_{(e)}^i = \mathbf{F}_i^{(e)}(t) + \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_{ij}^{(e)}(t). \quad (2.1c)$$

O sistema (2.1) oferece $\frac{1}{2} N(N - 1)$ equações de vínculo (2.1a) e $3N$ equações dinâmicas (2.1c); possui, de outro lado, $3N$ incógnitas $\{(x_{(e)}^i(t), y_{(e)}^i(t), z_{(e)}^i(t)); i = 1, 2, \dots, N\}$ e $\frac{1}{2} N(N - 1)$ incógnitas $\{\Lambda_{ij}(t) = \Lambda_{ji}(t); (i, j) = 1, 2, \dots, N\}$. Ele define, portanto, um sistema “fechado”, com mesmo número de equações e de incógnitas, mas a integração de (2.1) não é simples: as *forças de vínculo* são desconhecidas a priori e a imposição da condição (2.1a) a cada passo do tempo não é trivial.

Veremos, no próximo item, como essa questão pode ser contornada de uma forma simples e elegante e concluímos essa introdução observando que no sistema de referências fixo no “corpo” tem-se

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{x}_{(c)}^i &= \mathbf{T}^t(t) \cdot (\mathbf{x}_{(e)}^i(t) - \mathbf{x}_o(t)); \\ \circ \mathbf{F}_i^{(c)}(t) &= \mathbf{T}^t(t) \cdot \mathbf{F}_i^{(e)}; \\ \circ \mathbf{V}_{ij}^{(c)}(t) &= \mathbf{T}^t(t) \cdot \mathbf{V}_{ij}^{(e)} = \Lambda_{ij}(t) \cdot (\mathbf{x}_{(c)}^j - \mathbf{x}_{(c)}^i), \end{aligned} \quad (2.1d)$$

onde $\{\mathbf{x}_{(c)}^i; i = 1, 2, \dots, N\}$ são *constantes*, posto que definem as *coordenadas* dos “pontos materiais” em relação ao sistema de referências fixo no “corpo”.

2.2: PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Sejam $\{\Delta \mathbf{x}_{(e)}^i; i = 1, 2, \dots, N\}$ vetores arbitrários no espaço tri-dimensional; da igualdade⁹

$$-m_i \ddot{\mathbf{x}}_{(e)}^i + \mathbf{F}_i^{(e)}(t) + \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_{ij}^{(e)}(t) = \mathbf{0} \quad (2.2a)$$

⁹ Essa igualdade é o *Princípio de D’Alembert* da Mecânica: ele afirma que o *problema dinâmico* fica reduzido a um problema da *estática* considerando as forças de inércia com sinal trocado.

segue

$$\sum_{i=1}^N \left(-m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(e)}(t) + \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_{ij}^{(e)}(t) \right) \cdot \Delta \mathbf{x}_i^{(e)} = \mathbf{0}, \quad (2.2b)$$

para *qualquer* conjunto $\{\Delta \mathbf{x}_i^{(e)}; i = 1, 2, \dots, N\}$ de vetores. Reciprocamente, se a equação (2.2b) for satisfeita para *todo* conjunto $\{\Delta \mathbf{x}_i^{(e)}; i = 1, 2, \dots, N\}$ de vetores então (2.2b) implica em (2.2a).

Agora bem: como os vetores $\{\Delta \mathbf{x}_i^{(e)}; i = 1, 2, \dots, N\}$ são arbitrários podemos escolhê-los de forma que o *trabalho* realizado pelas forças de vínculo nos *deslocamentos* $\{\Delta \mathbf{x}_i^{(e)}; i = 1, 2, \dots, N\}$ seja nulo e, dessa forma, nos livrarmos das forças de vínculo no equacionamento dinâmico. A questão toda consiste em definir a classe de deslocamentos que satisfaz essa propriedade e a *Mecânica Analítica*, que objetiva estudar a dinâmica de *sistemas vinculados*, oferece uma resposta.

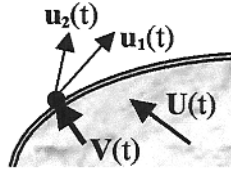


FIG.(2.2) : “Ponto material” (●) movendo-se na superfície lisa – isso é, sem atrito – de corpo deslocando-se com $\mathbf{U}(t)$.
 $(\mathbf{u}_{1,2}(t) \cdot \Delta t$: deslocamentos possíveis; $\mathbf{V}(t)$: força de vínculo)

Consideremos, por exemplo, o problema indicado na Fig.(2.2): um “ponto material” movendo-se na superfície lisa (sem atrito) de um corpo que se desloca com velocidade $\mathbf{U}(t)$. A força $\mathbf{V}(t)$ de vínculo age, no caso, na direção da normal \mathbf{n} à superfície ∂S do corpo, impedindo que a partícula perfure (ou se despregue de) ∂S ; de outro lado, os “deslocamentos possíveis”, aqueles mesmo que satisfazem a condição de vínculo na superfície do corpo, têm velocidades $\{\mathbf{u}_\alpha(t); \alpha = 1, 2, \dots\}$ tais que

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} \Rightarrow \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} = \mathbf{U} \Delta t \cdot \mathbf{n}|_{\partial S},$$

onde $\{\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \cdot \Delta t; \alpha = 1, 2, \dots\}$ são os “deslocamentos possíveis”. Define-se o “deslocamento virtual” $\delta \mathbf{x}$ como a *diferença* de dois “deslocamentos possíveis” e portanto

$$\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} = (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} = 0,$$

ou, dito de outra maneira: o “deslocamento virtual” é, no caso desse exemplo, um *deslocamento arbitrário* no plano tangente a ∂S . Portanto o trabalho realizado pela força de vínculo em um deslocamento virtual – o trabalho virtual da força de vínculo – é nulo por construção. Dois resultados seguem dessa breve discussão:

- i) “Deslocamentos virtuais” são deslocamentos arbitrários obtidos pela diferença entre dois “deslocamentos possíveis”, isso é, entre dois deslocamentos que satisfaçam as “condições de vínculo”;
- ii) O trabalho realizado pelas forças de vínculo nos “deslocamentos virtuais” é sempre nulo.

No caso do movimento de corpo rígido os “deslocamentos possíveis” da massa pontual m_i satisfazem os vínculos de “corpo rígido” e devem, portanto, ser expressos na forma (ver (1.9b))

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1^i(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{x}}_{o,1} \cdot \Delta t + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \Delta t \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i; \\ \mathbf{d}_2^i(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{x}}_{o,2} \cdot \Delta t + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \Delta t \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i.\end{aligned}$$

Um *deslocamento virtual* $\delta \mathbf{x}^i$ tem, nesse caso, expressão geral dada por

$$\delta \mathbf{x}^i = \delta \mathbf{x}_o + \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

com $\{\delta \mathbf{x}_o; \delta \boldsymbol{\theta}\}$ *arbitrários*: o campo geral dos “deslocamentos virtuais” tem, como não poderia deixar de ser, os mesmos *seis* graus de liberdade do movimento de corpo rígido, especificamente, as *seis* componentes dos vetores $\{\delta \mathbf{x}_o; \delta \boldsymbol{\theta}\}$.

Para efeito de verificação, consideremos o trabalho virtual das forças de vínculo nesses deslocamentos virtuais; por definição tem-se (ver (2.2b))

$$\begin{aligned}\delta \tau_v &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{V}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}^i + \mathbf{V}_{ji} \cdot \delta \mathbf{x}^j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{V}_{ij} + \mathbf{V}_{ji}) \cdot \delta \mathbf{x}_o + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\mathbf{V}_{ij} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i) + \mathbf{V}_{ji} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^j) \right],\end{aligned}$$

a primeira parcela, proporcional a $\delta \mathbf{x}_o$, sendo nula pois $\mathbf{V}_{ij} + \mathbf{V}_{ji} = \mathbf{0}$. Com o auxílio de (1.13) e (2.1d) tem-se portanto

$$\begin{aligned}
\delta\tau_v &= \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{x}_{(c)}^i \wedge \mathbf{V}_{ij} \right) + \left(\mathbf{x}_{(c)}^j \wedge \mathbf{V}_{ji} \right) \right] = \\
&= -\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{(c)}^j - \mathbf{x}_{(c)}^i \right) \wedge \mathbf{V}_{ij} = \\
&= -\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \Lambda_{ij}(t) \left(\mathbf{x}_{(c)}^j - \mathbf{x}_{(c)}^i \right) \wedge \left(\mathbf{x}_{(c)}^j - \mathbf{x}_{(c)}^i \right) = 0,
\end{aligned}$$

confirmando que o trabalho virtual das forças de vínculo é nulo. Fazendo agora $\Delta \mathbf{x}_{(e)}^i = \delta \mathbf{x}_{(e)}^i$ em (2.2b) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}^i \cdot \delta \mathbf{x}^i &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}^i; \\
\delta \mathbf{x}^i &= \delta \mathbf{x}_o + \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i,
\end{aligned} \tag{2.4a}$$

onde \mathbf{a}^i , a aceleração da massa (i), é dada por (1.9b) com $\mathbf{x}_{(c)}^i \rightarrow \mathbf{x}_{(c)}$. Define-se

$$\begin{aligned}
\circ \mathbf{F}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(t) \Leftrightarrow \mathbf{F}(t) \cdot \delta \mathbf{x}_o = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(t) \cdot \delta \mathbf{x}_o; \\
\circ \mathbf{N}_c(t) &= \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{x}_{(c)}^i \wedge \mathbf{F}_i(t) \right) \Leftrightarrow \mathbf{N}_c(t) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(t) \cdot \left(\delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i \right),
\end{aligned} \tag{2.4b}$$

com $\mathbf{F}(t)$ sendo a *força externa resultante* e $\mathbf{N}_c(t)$ o *momento das forças externas em relação à origem $O_{(c)}$* do sistema de referências fixo no corpo.

Como os “deslocamentos virtuais” são arbitrários podemos supor primeiro $\{\delta \mathbf{x}_o = \forall; \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}\}$ e obtermos assim, com o auxílio de (1.9b), a igualdade

$$\sum_{i=1}^N m_i \left\{ \ddot{\mathbf{x}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i \right) \right\} = \mathbf{F}(t).$$

O somatório nas três parcelas do lado esquerdo pode ser sintetizado por dois parâmetros associados à distribuição de massa nesse sistema discreto: m , a própria *massa total*, e \mathbf{x}_m , a posição do *centro de massa*, definidos pelas expressões

$$\begin{aligned}
\circ m &= \sum_{i=1}^N m_i; \\
\circ m \cdot \mathbf{x}_m &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{x}_{(c)}^i \Leftrightarrow \mathbf{x}_m = x_{(c)}^m \mathbf{e}_x + y_{(c)}^m \mathbf{e}_y + z_{(c)}^m \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{2.5a}$$

Dessa maneira a equação acima toma a forma

$$m \left[\ddot{\mathbf{x}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_m + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_m) \right] = \mathbf{F}(t) \quad (2.5b)$$

e observando que as componentes $(x_{(c)}^m, y_{(c)}^m, z_{(c)}^m)$ do vetor \mathbf{x}_m não variam no tempo, ver (2.5a), das relações cinemáticas,

$$\frac{D\mathbf{x}_m}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_m; \quad \frac{D^2\mathbf{x}_m}{Dt^2} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_m + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_m) \quad (2.5c)$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{m,e} &= \mathbf{F}(t); \\ \mathbf{x}_{m,e} &= \mathbf{x}_o + \mathbf{x}_m, \end{aligned} \quad (2.5d)$$

onde $\mathbf{x}_{m,e}(t)$ é o vetor posição do *centro de massa* do “corpo” em relação à origem $O_{(e)}$ do sistema espacial, m é a massa total e $\mathbf{F}(t)$ a resultante das forças externas: o agregado de “pontos materiais” se comporta como um “ponto material” de massa m , identificado com o *centro de massa*, que se desloca sob a ação da força resultante.

Supondo agora $\{\delta\mathbf{x}_o = \mathbf{0}; \delta\boldsymbol{\theta} = \nabla\}$ em (2.4) obtemos

$$\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\mathbf{x}_{(c)}^i \wedge \mathbf{a}^i) = \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{N}_c(t) \text{ para todo } \delta\boldsymbol{\theta}$$

e portanto

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_{(c)}^i \wedge \left\{ \ddot{\mathbf{x}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i) \right\} = \mathbf{N}_c(t),$$

ou, com o auxílio de (2.5a),

$$m \cdot \mathbf{x}_m \wedge \ddot{\mathbf{x}}_o + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_{(c)}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i) + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_{(c)}^i \wedge \left\{ \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i) \right\} = \mathbf{N}_c(t). \quad (2.6a)$$

Os dois somatórios do lado esquerdo serão elaborados a seguir. De fato, observando a identidade (ver (1.13))

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_{(c)}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i) = \sum_{i=1}^N m_i \left[(\mathbf{x}_{(c)}^i \cdot \mathbf{x}_{(c)}^i) \dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{x}_{(c)}^i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{x}_{(c)}^i \right]$$

e definindo o *tensor de inércia* \mathbf{J}_c pela expressão

$$\begin{aligned} \circ J_{xx}^c &= \sum_{i=1}^N m_i \left((y_{(c)}^i)^2 + (z_{(c)}^i)^2 \right); \quad \circ J_{xy}^c = -\sum_{i=1}^N m_i x_{(c)}^i \cdot y_{(c)}^i; \\ \circ J_{yy}^c &= \sum_{i=1}^N m_i \left((z_{(c)}^i)^2 + (x_{(c)}^i)^2 \right); \quad \circ J_{yz}^c = -\sum_{i=1}^N m_i y_{(c)}^i \cdot z_{(c)}^i; \quad \Rightarrow \mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} J_{xx}^c & J_{xy}^c & J_{zx}^c \\ J_{xy}^c & J_{yy}^c & J_{yz}^c \\ J_{zx}^c & J_{yz}^c & J_{zz}^c \end{bmatrix} \\ \circ J_{zz}^c &= \sum_{i=1}^N m_i \left((x_{(c)}^i)^2 + (y_{(c)}^i)^2 \right); \quad \circ J_{zx}^c = -\sum_{i=1}^N m_i z_{(c)}^i \cdot x_{(c)}^i; \end{aligned} \tag{2.6b}$$

obtém-se

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_{(c)}^i \wedge (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i) = \mathbf{J}_c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}. \tag{2.7a}$$

De forma análoga, se $r_{c,i}^2 = (x_{(c)}^i)^2 + (y_{(c)}^i)^2 + (z_{(c)}^i)^2$ então

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \left\{ \mathbf{x}_{c,i} \wedge \left[\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{c,i}) \right] \right\} &= \sum_i m_i \left\{ \mathbf{x}_{c,i} \wedge (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_{c,i}) \boldsymbol{\omega} \right\} = \\ &= -\sum_i \left\{ \boldsymbol{\omega} \wedge \left[m_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_{c,i}) \mathbf{x}_{c,i} \right] \right\} = \boldsymbol{\omega} \wedge \left[-\left(\sum_i m_i r_{c,i}^2 \right) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \right] \end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_i m_i \left\{ \mathbf{x}_{c,i} \wedge \left[\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{c,i}) \right] \right\} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega}). \tag{2.7b}$$

Utilizando (2.7a,b) em (2.6a) a seguinte equação dinâmica é obtida,

$$m \cdot \mathbf{x}_m \wedge \ddot{\mathbf{x}}_o + \mathbf{J}_c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}_c(t), \tag{2.8a}$$

onde \mathbf{J}_c é o *tensor de inércia* em relação aos eixos $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ com origem em $O_{(c)}$, $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_{c,x}(t)\mathbf{e}_x + \omega_{c,y}(t)\mathbf{e}_y + \omega_{c,z}(t)\mathbf{e}_z$ é a *velocidade angular* e $\mathbf{N}_c(t)$ é o *momento das forças externas* em relação a $O_{(c)}$.

Se $O_{(c)}$ coincidir com o *centro de massa* $O_{(m)}$ (ou se for deslocado para o centro de massa) então $\mathbf{x}_m \equiv \mathbf{0}$ e (2.8a) reduz-se a

$$\mathbf{J}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}_m(t), \quad (2.8b)$$

onde \mathbf{J}_m é o *tensor de inércia* em relação aos eixos $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ com origem no *centro de massa* $O_{(m)}$ e $\mathbf{N}_m(t)$ é o *momento das forças externas* em relação a $O_{(m)}$; obviamente, $\mathbf{N}_m(t)$ é dado pela diferença entre $\mathbf{N}_c(t)$ e o momento de transporte da força $\mathbf{F}(t)$ no translado $O_{(c)} \rightarrow O_{(m)}$ ou (ver exercício (2.1))

$$\mathbf{N}_m(t) = \mathbf{N}_c(t) - \mathbf{x}_m \wedge \mathbf{F}(t). \quad (2.8c)$$

Como mostrado no exercício (2.2), o momento de inércia \mathbf{J}_c pode ser expresso em termos de \mathbf{J}_m e é possível mostrar então, com o auxílio de (2.8c), que as equações (2.8a) e (2.8b) são equivalentes.

No item (2.4) voltaremos à análise das equações que regem o movimento de um corpo rígido; a seguir mostraremos, como um intróito ao formalismo da *Mecânica Analítica*, como essas equações – especificamente, (2.5b) e (2.8a) – podem ser obtidas diretamente a partir da *energia cinética* do corpo rígido e da fórmula cinemática deduzida na seção 1.

2.3: ENERGIA CINÉTICA E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Seja um corpo rígido ocupando uma certa região do espaço $V_{(c)}$ e $\rho(\mathbf{x}_{(c)})$ a *densidade de massa* do corpo, com $\mathbf{x}_{(c)}$ sendo as coordenadas de pontos do corpo rígido em relação a um sistema de referências com origem em um ponto $O_{(c)} \in V_{(c)}$; a *massa total* m e a posição \mathbf{x}_m do *centro de massa* são definidos pelas expressões

$$\begin{aligned} \circ m &= \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(c)}) dV_{(c)}; \\ \circ m \cdot \mathbf{x}_m &= \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(c)}) \cdot \mathbf{x}_{(c)} dV_{(c)}, \end{aligned} \quad (2.9a)$$

ver (2.5a). Suporemos, a seguir, que a origem $O_{(c)}$ seja deslocada para $O_{(m)} = O_{(c)} + \mathbf{x}_m$, isso é, que coincida com o *centro de massa*, e que o sistema $(\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z)$ seja trasladado para essa nova origem. Em relação à nova origem, a posição de um ponto do corpo rígido fica dada por $\mathbf{x}_{(m)} = \mathbf{x}_{(c)} - \mathbf{x}_m$ e as componentes do *tensor de inércia* \mathbf{J}_m são definidas pelas integrais

$$\begin{aligned}
\circ J_{xx}^m &= \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot (y_{(m)}^2 + z_{(m)}^2) dV_{(c)}; & \circ J_{xy}^m &= - \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot x_{(m)} y_{(m)} dV_{(c)}; \\
\circ J_{yy}^m &= \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot (z_{(m)}^2 + x_{(m)}^2) dV_{(c)}; & \circ J_{yz}^m &= - \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot y_{(m)} z_{(m)} dV_{(c)}; \\
\circ J_{zz}^m &= \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot (x_{(m)}^2 + y_{(m)}^2) dV_{(c)}; & \circ J_{zx}^m &= - \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot z_{(m)} x_{(m)} dV_{(c)}.
\end{aligned} \tag{2.9b}$$

A energia cinética do corpo rígido é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \left[\dot{\mathbf{x}}_{m,e} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)} \right]^2 dV_{(c)} = \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \left[\dot{\mathbf{x}}_{m,e}^2 + 2\dot{\mathbf{x}}_{m,e} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)}) + (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)})^2 \right] dV_{(c)},
\end{aligned}$$

com $\mathbf{x}_{m,e}(t)$ sendo o vetor posição do *centro de massa* em relação à origem do sistema fixo no espaço; como $\mathbf{x}_{(m)}$ são as coordenadas de pontos do corpo em relação ao sistema fixo no corpo e com origem no centro de massa tem-se

$$\int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot \mathbf{x}_{(m)} dV_{(c)} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{T} = \frac{1}{2} \left[m\dot{\mathbf{x}}_{m,e}^2 + \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)})^2 dV_{(c)} \right]. \tag{2.9c}$$

Por definição, no entanto,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)})^2 &= (\mathbf{x}_{(m)} \wedge \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{x}_{(m)} \wedge \boldsymbol{\omega}); \\
\mathbf{x}_{(m)} \wedge \boldsymbol{\omega} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{(m)} & y_{(m)} \\ z_{(m)} & 0 & -x_{(m)} \\ -y_{(m)} & x_{(m)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega},
\end{aligned}$$

e assim

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)})^2 = \boldsymbol{\omega}^t \cdot \begin{bmatrix} (y_{(m)}^2 + z_{(m)}^2) & -x_{(m)}y_{(m)} & -z_{(m)}x_{(m)} \\ -x_{(m)}y_{(m)} & (z_{(m)}^2 + x_{(m)}^2) & -y_{(m)}z_{(m)} \\ -z_{(m)}x_{(m)} & -y_{(m)}z_{(m)} & (x_{(m)}^2 + y_{(m)}^2) \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Colocando essa expressão em (2.9c) e utilizando (2.9b) obtemos finalmente

$$\mathcal{T}(\dot{\mathbf{x}}_{m,e}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} m \cdot \dot{\mathbf{x}}_{m,e}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.10a)$$

ou seja: a energia cinética do corpo rígido é a soma da *energia cinética de translação*, $\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_{m,e}^2$, com a *energia cinética de rotação* ($\boldsymbol{\omega} = \omega_{c,x} \mathbf{e}_x + \omega_{c,y} \mathbf{e}_y + \omega_{c,z} \mathbf{e}_z$)

$$\mathcal{T}_R = \frac{1}{2} \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)})^2 dV_{(c)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.10b)$$

Quando a origem do sistema coordenado fixo no corpo coincide com o *centro de massa* as energias cinéticas de *translação* e *rotação* se desacoplam, simplificando, como já observado em (2.8a) e (2.8b), as equações do movimento do corpo rígido. Esse mesmo resultado pode ser obtido de forma direta a partir da energia cinética (2.10a), como elaborado a seguir.

De fato, introduzindo a notação

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \psi}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial v_y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial v_z} \mathbf{e}_z$$

e observando que a *quantidade de movimento generalizada* pode ser definida como a derivada da energia cinética em relação à *velocidade generalizada* tem-se

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{P}(t) &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{m,e}} = m \cdot \dot{\mathbf{x}}_{m,e}(t); \\ \circ \mathbf{L}_m(t) &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \end{aligned} \quad (2.11a)$$

onde $\mathbf{P}(t)$ é a *quantidade de movimento linear* do corpo rígido e $\mathbf{L}_m(t)$ é a *quantidade de movimento angular* em relação ao centro de massa. As derivadas em relação ao tempo das quantidades de movimento generalizadas fornecem as *forças generalizadas* ou

$$\begin{aligned} \circ \frac{D\mathbf{P}}{Dt} &= \mathbf{F}(t) \quad \Rightarrow \quad m \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{m,e} = \mathbf{F}(t); \\ \circ \frac{D\mathbf{L}_m}{Dt} &= \mathbf{N}_m(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}_m(t), \end{aligned} \quad (2.11b)$$

com $\mathbf{F}(t)$ sendo a “força generalizada” relacionada ao movimento de translação e o momento $\mathbf{N}_m(t)$ sendo a “força generalizada” relacionada ao movimento de rotação.

A lei de conservação da *quantidade de movimento angular*, a mais importante e útil no estudo do movimento de um corpo rígido, não tem sempre a forma sintética explicitada em (2.11b); como discutido no exercício (2.3), em um sistema coordenado fixo no corpo, com a origem $O_{(c)}$ identificada pelo vetor posição $\mathbf{x}_{o,e}(t)$ em relação ao sistema fixo no espaço, sua expressão geral é dada por

$$\begin{aligned} \circ \frac{D\mathbf{L}_c}{Dt} &= \mathbf{N}_c + \mathbf{N}_{c,d}; \\ \circ \mathbf{N}_{c,d} &= -\dot{\mathbf{x}}_{o,e} \wedge \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2.11c)$$

onde $\mathbf{N}_c(t)$ é o momento das forças externas e $\mathbf{N}_{c,d}(t)$ é um momento dinâmico interno que se anula em dois casos:

- i) Quando a origem $O_{(c)}$ for um *ponto fixo* no espaço ($\dot{\mathbf{x}}_{o,e} \equiv \mathbf{0}$);
- ii) Quando a velocidade $\dot{\mathbf{x}}_{o,e}$ de $O_{(c)}$ for *paralela* a \mathbf{P} .

O caso (ii) ocorre, por exemplo, quando $O_{(c)} \equiv O_{(m)}$ – isso é quando a origem coincide com o centro de massa – mas é importante realçar que um momento do tipo $\mathbf{N}_{c,d}(t)$ surge naturalmente no estudo do movimento de um corpo rígido no interior de um fluido: como discutido no exercício (2.4), a contribuição do fluido aparece como “inércias”, denominadas “massas adicionais”, que dependem da direção do movimento do corpo, implicando em um vetor quantidade de movimento $\mathbf{P}(t)$ *não alinhado* com a velocidade de translação do corpo rígido. O momento $\mathbf{N}_{c,d}(t)$ resultante, denominado *momento de Munk*, tem um efeito desestabilizador¹⁰ e é por sua causa que apêndices estabilizadores, denominados “empenagens”, são colocados na parte traseira de aviões, submarinos, etc.

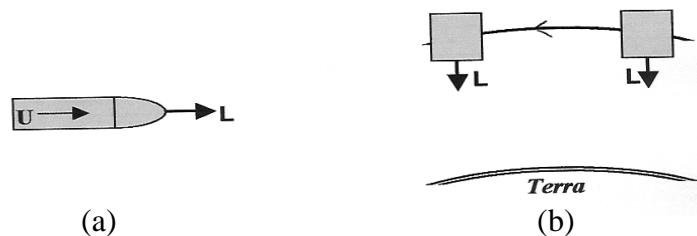


FIG.(2.3): Manutenção do apontamento: $\mathbf{L} = \text{cte}$.
(a) balística; (b) satélite artificial.

¹⁰ É importante observar, no entanto, que no problema fluido o momento $\mathbf{N}_{c,d}(t)$ tem uma origem *estrutural* enquanto em (2.11c) ele aparece por uma questão de *representação*: no caso fluido esse momento causa uma *instabilidade* ao passo que aqui ele desaparece quando se translada a origem do sistema coordenado de $O_{(c)}$ para $O_{(m)}$.

A *conservação* da quantidade de movimento angular é utilizada em diversas aplicações. É utilizada na balística, por exemplo, para manter a direção do projétil: como indicado na Fig.(2.3), ele é ejetado do duto condutor com um “spin” – isso é, com uma *quantidade de movimento angular* \mathbf{L} – e como o torque externo (gravitacional) é muito pequeno o projétil mantém essencialmente sua direção no espaço pois \mathbf{L} mantém-se “invariante”. O mesmo procedimento é utilizado para estabilizar órbitas de satélites: a força gravitacional é contrabalançada pela centrífuga e o momento externo é praticamente nulo. Atuadores agindo por um tempo determinado estabilizam o satélite em uma dada atitude e ele nela se mantém por conservação da quantidade de movimento angular \mathbf{L} .

Um exemplo mais prosaico, e talvez por isso mais facilmente assimilável, é fornecido pelo equilíbrio de um ciclista na bicicleta. Na ausência de movimento esse equilíbrio é certamente instável; a partir do instante, no entanto, que o ciclista começa a pedalar, a rotação rápida da roda gera uma quantidade de movimento angular \mathbf{L}_0 , com o sentido indicado na Fig.(2.4a). O deslocamento do centro de massa é paralelo ao vetor quantidade de movimento linear \mathbf{P} e se o ciclista se mantiver na vertical o momento externo será nulo: de acordo com (2.11c) \mathbf{L}_0 conserva-se nessas condições, o translado da bicicleta em linha reta se torna muito estável e essa trajetória só será alterada se um momento externo for introduzido. É por isso que o ciclista para efetuar uma curva tem que pender seu corpo, introduzindo um momento externo e modificando a direção de \mathbf{L}_0 no sentido desejado, como indicado nas Fig.(2.4b,c).

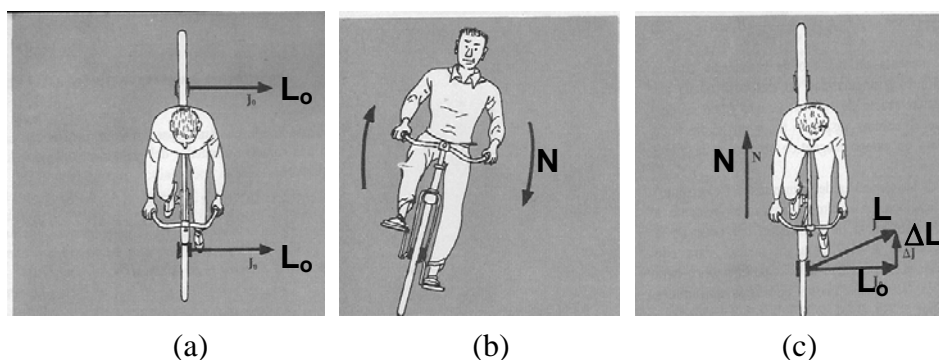


FIG.(2.4): *Quantidade de Movimento Angular*: (a) Estabilidade de uma bicicleta em translação uniforme ($\mathbf{L}_0 = \text{cte.}$); (b) Torque aplicado; (c) $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{N} \cdot \Delta t$.

A conservação da quantidade de movimento angular permite uma leitura simplificada do movimento de um pião e é também o fundamento físico de um instrumento de navegação muito utilizado – o giroscópio – mas esses problemas serão mais demoradamente estudados em outras partes do texto.

Encerramos esse item com a discussão de um problema diretamente relacionado com o giro da Terra – o *pêndulo de Foucault* – e introduzimos esse

assunto através de um exemplo trivial. De fato, consideremos um pêndulo com a linha de prumo na mesma vertical do eixo de rotação de um carrossel mas acima dele e façamos o pêndulo oscilar no plano vertical (x,z) . O movimento do pêndulo não é afetado pela rotação do carrossel – esses movimentos são certamente independentes – e um observador colocado no carrossel vê o plano (x,z) de oscilação do pêndulo girar com a mesma velocidade angular do carrossel mas em sentido oposto: observando só o movimento desse plano de oscilação ele é capaz de inferir o sentido e a velocidade de rotação do carrossel.

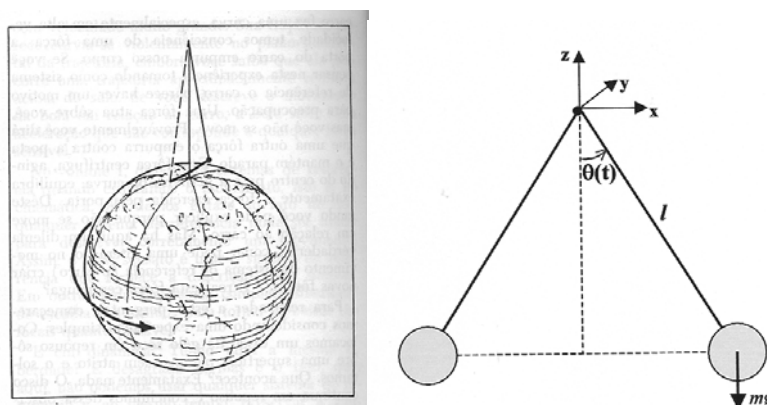


FIG. (2.5) : *Pêndulo de Foucault no Pólo Norte*: O pêndulo oscila em um movimento quase retilíneo enquanto a Terra gira embaixo dele.

O eixo de rotação da Terra coincide com a linha que une o Pólo Sul ao Pólo Norte e se o versor \mathbf{k} for definido nessa linha na direção Sul-Norte a velocidade de rotação da Terra é dada por $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$.

Se um pêndulo de comprimento l for posto para oscilar no plano vertical (x,z) a quantidade de movimento angular \mathbf{L}_0 em relação ao vértice do pêndulo é sempre paralelo ao vetor \mathbf{j} e o plano de oscilação (x,z) é fixo no espaço; se agora o fio de prumo do pêndulo coincidir com a linha Sul-Norte – isso é, se o pêndulo estiver ou no Pólo Sul ou no Pólo Norte – o pêndulo oscila no plano vertical (x,z) em um movimento quase retilíneo enquanto a Terra gira embaixo dele. Em outras palavras: o *pêndulo de Foucault* é ele também um *giroscópio* pois a normal ao plano de oscilação aponta sempre para uma *direção fixa no espaço*.

O plano de oscilação do pêndulo gira lentamente no tempo – nos Pólos um giro completo demora 24 horas – e é evidente que o movimento oscilatório cessa, em geral, em uma fração mínima do dia. Em outras palavras, o fenômeno proposto pelo artefato de Foucault – a observação do giro da Terra – dificilmente será detectado na prática a menos que condições muito especiais sejam impostas. Para entender que condições são essas a oscilação do pêndulo deve ser discutida com um pouco mais de

profundidade, como elaborado a seguir (ver também exercício (2.5)). Assim, se o ângulo $\theta(t)$ indicado na Fig.(2.5) for pequeno tem-se

$$\left. \begin{aligned} \circ \mathbf{L}_o(t) &= (-l\mathbf{k}) \wedge (ml\dot{\theta}(t)\mathbf{i}) = -ml^2\dot{\theta}(t)\mathbf{j} \\ \circ \mathbf{N}_o(t) &= (l\theta(t)\mathbf{i}) \wedge (-mg\mathbf{k}) = mgl\theta(t)\mathbf{j} \end{aligned} \right\} \frac{D\mathbf{L}_o}{Dt} = \mathbf{N}_o \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (2.12a)$$

a *frequência natural* de oscilação do pêndulo sendo dada por

$$\varpi = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.12b)$$

Se, como suposto, a oscilação for de pequena amplitude, o momento dissipativo que amortece a oscilação pode ser escrito na forma $\mathbf{N}_{o,d} = -2ml^2\zeta\varpi(d\theta/dt)$, com $\zeta \ll 1$ sendo a porcentagem do amortecimento crítico; dessa maneira

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\varpi\dot{\theta} + \varpi^2\theta \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\zeta\varpi t} \cos(\varpi t). \quad (2.12c)$$

Em uma hora – e isso corresponde ao ponteiro de um relógio de parede girar de um ângulo correspondendo a 1/2 hora – a oscilação decairá por um fator $e^{-2} \approx 13.5\%$ se

$$\zeta \cong \frac{1}{1800} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.12d)$$

indicando que o fenômeno pode ser observado se o amortecimento for muito pequeno ($\zeta \approx 0.1\%$) e o comprimento do pêndulo for muito grande ($l \approx 30\text{m}$); em latitudes menores a faixa de operação é ainda mais estreita e o movimento de rotação da Terra induz aí uma força na direção da normal à superfície terrestre desprezível face à atração gravitacional. Na realidade, o giro completo do pêndulo de Foucault pode ser observado se utilizarmos um mecanismo de controle que forneça energia ao movimento oscilatório no plano vertical (x,z): como $\zeta \ll 1$, pequenos impulsos no plano vertical (x,z), que roda lentamente no sistema fixo na Terra, podem fornecer a potência necessária para manter o pêndulo oscilando indefinidamente; a potência média que deve ser fornecida em um ciclo de oscilação é da ordem de $\zeta \cdot mg(g/\varpi) \cdot \theta_0 \propto ml^{1/2}$.

2.4: EQUAÇÕES DE EULER DE UM CORPO RÍGIDO

As equações de *translação* e *rotação* de um corpo rígido se desacoplam quando a origem do sistema coordenado fixo no corpo coincide com o centro de massa $O_{(m)}$. Nesse caso a equação de rotação do corpo rígido fica dada por (2.8b) e veremos, a seguir, que uma escolha apropriada dos eixos coordenados simplifica ainda mais essa equação.

O ponto de partida é observar, da expressão da energia cinética de rotação,

$$T_R(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \int_{V_{(c)}} \rho(\mathbf{x}_{(m)}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(m)})^2 dV_{(c)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{ver (2.10b)})$$

que o *tensor de inércia* \mathbf{J}_m é representado, na base ortonormal $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$, por uma matriz (3x3) *simétrica* (ver (2.6b)) e *positiva-definida*, isso é

$$\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega} > 0. \quad (2.13a)$$

Supondo agora que em relação a uma certa base ortonormal $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ o tensor de inércia \mathbf{J}_m seja representado por uma matriz diagonal – isso é, que $\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$ – a expressão da energia nesse sistema coordenado define uma *superfície cônica*, especificamente o *elipsóide* (pois $J_k > 0; k = 1,2,3$)

$$\begin{aligned} \circ J_1 \cdot \omega_1^2 + J_2 \cdot \omega_2^2 + J_3 \cdot \omega_3^2 &= 2T_R(\boldsymbol{\omega}) = \text{cte.}; \\ \circ \boldsymbol{\omega} &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2.13b)$$

com $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ indicando as direções dos *eixos principais* da cônica: se $J_1 \leq J_2 \leq J_3$, o eixo maior está na direção \mathbf{e}_1 , o menor na direção \mathbf{e}_3 e o intermediário na direção \mathbf{e}_2 . A equação desse elipsóide em relação a eixos coordenados arbitrários $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ é dada por (2.10b) com

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^t \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_m = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}^t, \quad (2.13c)$$

onde \mathbf{T} é uma *matriz ortogonal*. Parece razoável imaginar que quando \mathbf{T} varre o “conjunto das matrizes ortogonais” e $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ o “conjunto dos números reais positivos”, as matrizes \mathbf{J}_m geradas a partir de (2.13c) devem varrer o “conjunto das

matrizes simétricas positiva-definidas”. Esse resultado, recorrente em diferentes capítulos da Física-Matemática, será demonstrado a seguir.

Definindo, para efeito de normalização, $\boldsymbol{\omega} = \|\boldsymbol{\omega}\| \mathbf{e}$, com \mathbf{e} sendo o versor na direção de $\boldsymbol{\omega}$, tem-se

$$\begin{aligned} \circ \mathcal{T}_R(\mathbf{e}) &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}; \\ \circ \|\mathbf{e}\|^2 &= \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} = 1, \end{aligned} \tag{2.14a}$$

e o problema de determinar as *direções principais* reduz-se à determinação dos valores máximo, mínimo – de uma forma genérica, dos “valores estacionários” – da função $\mathcal{T}_R(\mathbf{e})$ restrita pela condição $\|\mathbf{e}\| = 1$.

Em uma linguagem mais analítica, se \mathbf{e}_o for uma dessas *direções principais* e $\delta\mathbf{e}$ for uma perturbação de ordem $\delta \ll 1$ em \mathbf{e}_o , a *condição de estacionariedade* fica dada por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T}_R &= \mathcal{T}_R(\mathbf{e}_o + \delta\mathbf{e}) - \mathcal{T}_R(\mathbf{e}_o) \cong \mathcal{O}(\delta^2) \\ \text{com } (\delta\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e}_o) &\cong \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \tag{2.14b}$$

pois $\|\mathbf{e}_o + \delta\mathbf{e}\| = 1$.

Agora bem: o valor estacionário (mínimo ou máximo) de (2.14a) seria obtido pela derivada simples da função em relação à sua variável não fosse pela restrição $\|\mathbf{e}\| = 1$ imposta. Poderíamos, óbvio, utilizar essa restrição para eliminar uma das componentes de \mathbf{e} e obter assim uma função das duas variáveis independentes restantes. No entanto, a eliminação direta desse vínculo, como antes no problema dinâmico de um agregado rígido de partículas, é possível mas analiticamente um pouco complexa; mais que isso, é deselegante, e a procura da elegância leva aqui, como de resto em inúmeros problemas da Física-Matemática, ao descortino de uma estrutura muito mais rica¹¹ e fértil.

No caso em pauta, o mesmo Lagrange, que introduziu o Princípio dos Trabalhos Virtuais para eliminar as forças de vínculo, introduziu aqui também um procedimento análogo, denominado na literatura de “*multiplicadores de Lagrange*”. A idéia básica consiste em modificar a expressão da energia cinética por uma expressão da forma $-\frac{1}{2} \lambda (\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} - 1)$ com λ sendo o *multiplicador de Lagrange*; assim

¹¹ Poincaré, um dos maiores matemáticos do final do século XIX, com fundamentais contribuições para a Matemática e Mecânica, dizia que a invenção na Matemática era medida não por seu rigor mas pela fertilidade dos conceitos por ela engendrada; e que o único critério para identificar a fertilidade ou não de uma dada teoria era essencialmente estético. Ver Hadamard, J. (1954) “*The Psychology of Invention in the Mathematical Fields*”, Dover.

$$\mathcal{T}_o(\mathbf{e}; \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2} \lambda (\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} - 1), \quad (2.15a)$$

onde $\mathcal{T}_o(\mathbf{e}; \lambda) \equiv \mathcal{T}_R(\mathbf{e})$ quando $\|\mathbf{e}\| = 1$.

Derivando $\mathcal{T}_o(\mathbf{e}; \lambda)$ em relação às suas variáveis e igualando a zero obtém-se

$$\begin{aligned} \circ \frac{\partial \mathcal{T}_o}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}; \\ \circ \frac{\partial \mathcal{T}_o}{\partial \lambda} = 0 &\Rightarrow \|\mathbf{e}\| = 1, \end{aligned} \quad (2.15b)$$

e é trivial verificar que se $\{\mathbf{e}_o; \lambda_o\}$ for solução de (2.15b) então não só $\|\mathbf{e}_o\| = 1$ mas também

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{T}_R &= \mathcal{T}_R(\mathbf{e}_o + \delta \mathbf{e}) - \mathcal{T}_R(\mathbf{e}_o) = \delta \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_o + \mathcal{O}(\delta^2) = \\ &= \lambda_o \cdot (\delta \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e}_o) + \mathcal{O}(\delta^2) \cong \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned}$$

para todo $\delta \mathbf{e}$ tal que $\|\mathbf{e}_o + \delta \mathbf{e}\| = 1$, ver (2.14b): o problema de minimizar $\mathcal{T}_R(\mathbf{e})$ sujeito à restrição $\|\mathbf{e}\| = 1$ reduz-se ao *problema de valor característico* (2.15b).

A simetria de \mathbf{J}_m impõe a condição $\text{Imag} [(\mathbf{e}^*)^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}] = 0$, onde $\text{Imag} [\cdot]$ é a *parte imaginária* do número entre colchetes, e portanto λ é *real e positivo* pois a matriz \mathbf{J}_m é *positiva definida*: $(\mathbf{e}^*)^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e} > 0$ para $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. O polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_m) = (\lambda - J_1) \cdot (\lambda - J_2) \cdot (\lambda - J_3) \quad (2.15c)$$

tem assim três raízes reais e positivas $0 < J_1 \leq J_2 \leq J_3$ e os vetores característicos $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ definem uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 pois $\|\mathbf{e}_k\| = 1$ e¹²

$$\left. \begin{aligned} \circ \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_k &= J_k \mathbf{e}_k \Rightarrow \mathbf{e}_i^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_k = J_k \mathbf{e}_i^t \cdot \mathbf{e}_k; \\ \circ \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_i &= J_i \mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{e}_k^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_i = J_i \mathbf{e}_k^t \cdot \mathbf{e}_i; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}_i^t \cdot \mathbf{e}_k = 0. \quad (2.16a)$$

Seja agora $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ um vetor arbitrário de \mathbb{R}^3 ; observando que $\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{x} = x_1 (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_1) + x_2 (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_2) + x_3 (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_3)$ obtém-se

¹² Utilizando a identidade $(\mathbf{e}_i)^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_k)^t \cdot \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_i$, pois \mathbf{J}_m é simétrica, e subtraindo uma equação da outra a relação (2.16a) pode ser deduzida quando $J_k \neq J_i$. No caso de raízes múltiplas ($J_k = J_i$) o mesmo resultado pode ser obtido, como elaborado no exercício (2.7).

$$\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (2.16b)$$

ou, em outras palavras: o *tensor de inércia* é *diagonal* na base $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ e essa base define os *eixos principais de inércia* do corpo (ou, em uma linguagem mais geométrica, os eixos principais do elipsóide $\mathcal{T}_R(\boldsymbol{\omega})$).

Resumindo: dada uma certa distribuição de massa $\rho(\mathbf{x}_{(c)})$ de um corpo rígido o *centro de massa* \mathbf{x}_m é determinado pela relação (2.9a); deslocando a origem do sistema coordenado fixo no corpo para o centro de massa, o *tensor de inércia* \mathbf{J}_m é determinado pelas integrais (2.9b) e os *eixos principais de inércia* pelo problema de valor característico (2.15b). Em relação a esses eixos coordenados a equação dinâmica de rotação do corpo rígido (2.8b) fica dada pelo sistema

$$\begin{aligned} \circ J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_3 \omega_2 &= N_1(t); \\ \circ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= N_2(t); \\ \circ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_2 \omega_1 &= N_3(t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

com $\mathbf{N}_m(t) = N_1(t)\mathbf{e}_1 + N_2(t)\mathbf{e}_2 + N_3(t)\mathbf{e}_3$. Essas são as *Equações de Euler* de um corpo rígido, que integradas conjuntamente com as *equações cinemáticas* (1.11) fornecem, em cada instante do tempo, a posição do corpo. O sistema completo é *não-linear* e *acoplado* pois, em geral, o momento $\mathbf{N}_m(t)$ depende da atitude (posição) do corpo. Em alguns problemas importantes, no entanto, o momento externo é muito pequeno e pode ser desconsiderado em primeira aproximação; isso ocorre, por exemplo, no estudo do movimento dos planetas e satélites onde as forças de atração (gravidade) e de repulsão (centrífuga) se compensam e o momento externo resultante, devido às pequenas assimetrias na distribuição de massa dos corpos, é muito fraco: nesses casos podemos supor $\mathbf{N}_m(t) = \mathbf{0}$ e (2.17) se desacopla de (1.11).

Quando $\mathbf{N}_m(t) = \mathbf{0}$ o sistema (2.17) admite três soluções estacionárias triviais, a saber: $\{\omega_1 = \omega_0; \omega_2 = \omega_3 = 0\}$; $\{\omega_2 = \omega_0; \omega_1 = \omega_3 = 0\}$ e $\{\omega_3 = \omega_0; \omega_1 = \omega_2 = 0\}$. A primeira é uma rotação em torno do eixo de menor momento de inércia \mathbf{e}_1 , a segunda em torno do eixo de momento de inércia intermediário \mathbf{e}_2 e a terceira em torno do eixo de maior momento de inércia \mathbf{e}_3 .

Essas soluções estacionárias existem, é óbvio, mas só serão observadas se forem *estáveis*, isso é, se pequenas perturbações iniciais, inevitáveis no mundo real, não forem amplificadas com o tempo. O estudo da *estabilidade* de uma *solução estacionária* é clássico e segue, em essência, o seguinte roteiro: dada a solução

estacionária – por exemplo, $\{\omega_1 = \omega_0; \omega_2 = \omega_3 = 0\}$ – considera-se uma perturbação pequena $\{\delta\omega_1(t); \delta\omega_2(t); \delta\omega_3(t)\}$, da ordem δ , obrigando que a função perturbada $\{\omega_1(t) = \omega_0 + \delta\omega_1(t); \omega_2(t) = \delta\omega_2(t); \omega_3(t) = \delta\omega_3(t)\}$ seja também solução de (2.17). Se a solução estacionária for estável a perturbação $\{\delta\omega_1(t); \delta\omega_2(t); \delta\omega_3(t)\}$ permanece da ordem δ e termos da ordem δ^2 (ou eventualmente de ordem superior) podem ser ignorados em (2.17): essa equação torna-se então *linear*, possuindo solução da forma exponencial $e^{\mu t}$ com $\mu = \sigma + i\omega$. Se $\sigma \leq 0$ a perturbação ou permanece da ordem δ ($\sigma = 0$) ou decresce exponencialmente para zero ($\sigma < 0$) e a solução estacionária $\{\omega_1 = \omega_0; \omega_2 = \omega_3 = 0\}$ será *estável*; caso contrário, se $\sigma > 0$ a perturbação crescerá exponencialmente com o tempo e a solução estacionária será *instável*.

Esse roteiro, já foi dito, é geral e será exemplificado aqui no estudo da solução estacionária $\{\omega_1 = \omega_0; \omega_2 = \omega_3 = 0\}$ do sistema (2.17) com $\mathbf{N}_m(t) = \mathbf{0}$. Colocando $\{\omega_1(t) = \omega_0 + \delta\omega_1(t); \omega_2(t) = \delta\omega_2(t); \omega_3(t) = \delta\omega_3(t)\}$ em (2.17) e desprezando termos da ordem δ^2 obtém-se

$$\begin{aligned} \circ J_1 \delta \dot{\omega}_1 &= 0; \\ \circ J_2 \delta \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_0 \delta \omega_3 &= 0; \\ \circ J_3 \delta \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_0 \delta \omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.18a}$$

A solução da primeira equação é $\delta\omega_1(t) = \delta\omega_1(0)$ e permanece, portanto, da ordem δ por todo o tempo. Eliminando $\delta\omega_3(t)$ na terceira equação e utilizando na segunda a seguinte equação resulta para $\delta\omega_2(t)$:

$$\delta \ddot{\omega}_2 + \Omega \cdot \delta \omega_2 = 0; \quad \Omega = - \frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_1)}{J_2 J_3} \omega_0.$$

O mesmo procedimento pode ser repetido para as demais soluções estacionárias obtendo-se sempre uma equação da forma

$$\delta \ddot{\omega} + \Omega \cdot \delta \omega = 0 \tag{2.18b}$$

$$\begin{aligned} \circ \Omega &= - \frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_1)}{J_2 J_3} \omega_0 > 0 \text{ para } \{\omega_1 = \omega_0; \omega_2 = \omega_3 = 0\}; \\ \text{com} \quad \circ \Omega &= - \frac{(J_2 - J_1)(J_3 - J_2)}{J_1 J_3} \omega_0 < 0 \text{ para } \{\omega_2 = \omega_0; \omega_1 = \omega_3 = 0\}; \\ \circ \Omega &= - \frac{(J_3 - J_2)(J_1 - J_3)}{J_2 J_1} \omega_0 > 0 \text{ para } \{\omega_3 = \omega_0; \omega_2 = \omega_1 = 0\}. \end{aligned} \tag{2.18c}$$

A solução geral de (2.18b) é da forma $e^{\mu t}$ com μ sendo raiz da *equação característica*

$$\mu^2 + \Omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} \circ \Omega > 0 \Rightarrow \mu = \pm i\sqrt{\Omega} \quad (\sigma = 0); \\ \circ \Omega < 0 \Rightarrow \mu = \pm \sqrt{\Omega} \quad (\sigma > 0). \end{cases} \quad (2.18d)$$

Confrontando (2.18d) e (2.18c) conclui-se que as rotações em torno do *menor* eixo de inércia \mathbf{e}_1 e do *maior* \mathbf{e}_3 são ambas *estáveis*, pois então $\Omega > 0$; já a rotação em torno do eixo \mathbf{e}_2 , onde a inércia tem valor *intermediário*, é sempre *instável* pois $\Omega < 0$.

O problema, na realidade, é um pouco mais complexo e por uma razão muito simples: ao supormos $\mathbf{N}_m(t) = \mathbf{0}$ nessa análise estamos desconsiderando pequenos “efeitos não modelados”, como a dissipação, por exemplo, e a inclusão deles pode fazer surgir, no caso $\Omega > 0$, uma raiz da equação característica com uma parte real que tanto pode ser negativa como positiva: no primeiro caso a conclusão final seria a mesma mas no segundo a rotação suposta estável seria na realidade instável, pois $\sigma > 0$ por menor que fosse a intensidade desses efeitos não-modelados. Sistemas com $\sigma = 0$ são exemplos de sistemas ditos “*estruturalmente instáveis*” e eles merecem uma análise mais detalhada; em particular, essa questão tem, no problema em pauta, uma relevância prática que não pode ser ignorada, como discutido mais adiante.

As equações (2.17) simplificam-se ainda mais quando a equação característica do tensor de inércia tem raiz dupla $J_1 = J_2$; isso ocorre, por exemplo, quando o corpo rígido for um corpo de revolução com distribuição axi-simétrica de massa e muitos satélites e planetas satisfazem, grosso modo, essa condição. Com o intuito de simplificar a notação, suporemos aqui que o eixo de revolução seja \mathbf{e}_3 , como indicado na Fig.(2.6a), designando por J_3 o momento de inércia em relação ao eixo de revolução, independente desse valor ser o maior ou menor momento de inércia do corpo; o momento de inércia em relação aos eixos $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$ será designado por J_1 . Supondo $\mathbf{N}_m(t) = \mathbf{0}$ as equações (3.17) ficam então dadas por

$$\begin{aligned} \circ J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_2 &= 0; \\ \circ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= 0; \\ \circ J_3 \dot{\omega}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.19a)$$

com solução $\omega_3 = \text{cte. e}$

$$\Omega = \text{sinal}(J_3 - J_1) \cdot \frac{|J_3 - J_1|}{J_1} \cdot \omega_3 \Rightarrow \begin{cases} \circ \omega_1(t) = (a\omega_0) \cdot \cos(\Omega t); \\ \circ \omega_2(t) = (a\omega_0) \cdot \sin(\Omega t). \end{cases} \quad (2.19b)$$

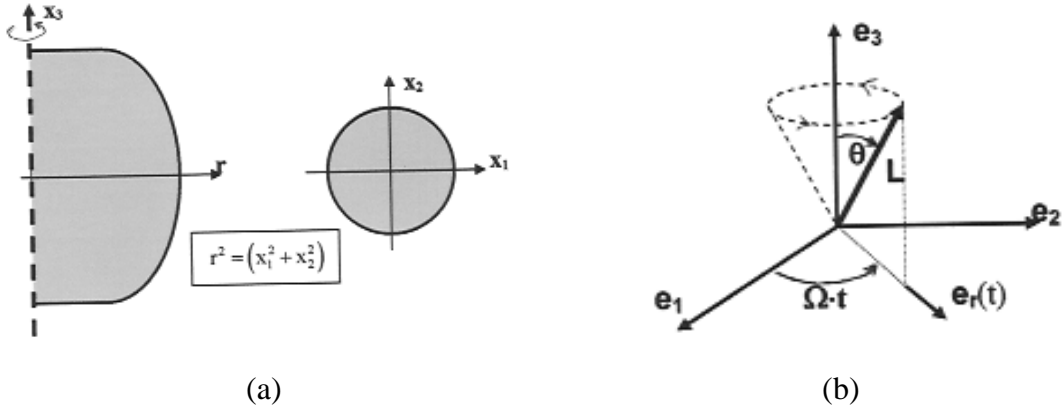


FIG. (2.6): (a) Corpo de revolução em torno do eixo principal \mathbf{e}_3 ; (b) Movimento de precessão do eixo \mathbf{e}_3 em torno da direção fixa no espaço \mathbf{L} , o *momentum angular*.

Definindo o módulo do *momentum angular* \mathbf{L} pela expressão $J_3 \cdot \omega_0$, o módulo da velocidade angular no plano $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$ foi escrita em (2.19b) como a parcela $a\omega_0$ da velocidade angular ω_0 ; o giro do vetor $\mathbf{e}_r(t) = \cos \Omega t \mathbf{e}_1 + \sin \Omega t \mathbf{e}_2$ no plano $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$ é no sentido anti-horário, como indicado na Fig.(2.6b), se $J_3 > J_1$ ($\Omega > 0$) e no sentido oposto se $J_1 > J_3$ ($\Omega < 0$).

O momentum angular é dado por

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{L} &= J_1(a\omega_0) [\cos \Omega t \mathbf{e}_1 + \sin \Omega t \mathbf{e}_2] + J_3 \omega_0 \mathbf{e}_3; \\ \circ \|\mathbf{L}\| &= J_3 \omega_0 = \sqrt{J_1^2 (a\omega_0)^2 + J_3^2 \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (2.19c)$$

e com o auxílio de (2.19b) a identidade $D\mathbf{L}/Dt = d\mathbf{L}/dt + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L} \equiv \mathbf{0}$ pode ser diretamente verificada: o momentum angular \mathbf{L} é um vetor fixo no espaço ($\mathbf{N}_m(t) \equiv 0$).

De (2.19b,c) conclui-se que o vetor \mathbf{L} roda em torno de \mathbf{e}_3 na superfície cônica de ângulo θ com a velocidade angular Ω , ver Fig.(2.6b); na realidade, como \mathbf{L} é fixo no espaço um observador também fixo no espaço vê o eixo de rotação \mathbf{e}_3 rodando em torno de \mathbf{L} em um movimento denominado “precessão”; o *ângulo de precessão* θ pode ser expresso na forma (ver (2.19c) e Fig.(2.6b))

$$\begin{aligned} \circ \sin \theta &= a \frac{J_1}{J_3}; \\ \circ \cos \theta &= \frac{\omega_3}{\omega_0}, \end{aligned} \quad (2.20a)$$

e define a “atitude” do corpo rígido em relação à uma direção espacial pré-fixada; reciprocamente, observando o movimento de precessão do eixo de rotação em relação a um eixo espacial pode-se inferir a direção espacial de \mathbf{L} .

A energia (cinética) do movimento de rotação é dada pela expressão habitual

$$E = \frac{1}{2} \left[\mathbf{J}_1 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \mathbf{J}_3 \cdot \omega_3^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{J}_1 \cdot (a\omega_0)^2 + \mathbf{J}_3 \cdot \omega_3^2 \right],$$

mas pode também ser expressa, em termos do ângulo de precessão θ , na forma

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{J}_3 \cdot \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\mathbf{J}_3}{\mathbf{J}_1} - 1 \right) \sin^2 \theta \right]. \quad (2.20b)$$

Considerando movimentos de rotação com mesma intensidade $\mathbf{J}_3\omega_0$ do *momentum angular* e sendo $E_0 = E(0)$ a energia quando o corpo roda em torno de \mathbf{e}_3 , a expressão (2.20b) mostra que o movimento de precessão tem energia maior que E_0 quando $\mathbf{J}_3 > \mathbf{J}_1$ (“corpo moeda” na Fig.(2.7)) e menor no caso contrário (“corpo charuto” na mesma figura).

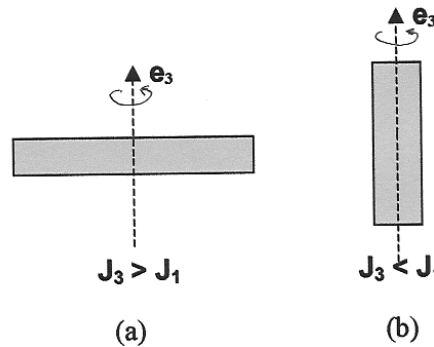


FIG.(2.7): (a) Corpo de revolução com $\mathbf{J}_3 > \mathbf{J}_1$ (“moeda”);
(b) Corpo de revolução com $\mathbf{J}_3 < \mathbf{J}_1$ (“charuto”).

Em um movimento de precessão do “corpo moeda” a energia $E(\theta) > E_0$ e na presença de dissipação a energia tende a diminuir, ou seja: $E(\theta) \rightarrow E_0$ no limite $t \rightarrow \infty$ e a rotação em torno do eixo de revolução é *assintoticamente estável*¹³ no caso $\mathbf{J}_3 > \mathbf{J}_1$. De outro lado, em um movimento de precessão do “corpo charuto” a energia $E(\theta) < E_0$ e na presença de dissipação a energia tende a diminuir, se afastando ainda mais de E_0 : a rotação em torno do eixo de revolução é *instável* na presença de forças dissipativas no caso $\mathbf{J}_3 < \mathbf{J}_1$.

¹³Uma solução estacionária é dita “*assintoticamente estável*” quando uma pequena perturbação não só permanece pequena como efetivamente tende a zero no correr do tempo.

Esse resultado pode ser obtido diretamente a partir de (2.20b): supondo invariante¹⁴ a intensidade $J_3\omega_0$ do momentum angular e derivando em relação ao tempo a energia obtemos

$$\frac{dE}{dt} = J_3\omega_0^2 \left(\frac{J_3}{J_1} - 1 \right) \sin\theta \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.20c)$$

Na ausência de dissipação $dE/dt = 0$ e portanto $d\theta/dt = 0$, independente do fato de $J_3 > J_1$ ou $J_3 < J_1$, confirmando o estudo de estabilidade efetuado anteriormente, ver (2.18c,d). Na presença de dissipação $dE/dt < 0$ e $d\theta/dt < 0$ se e somente se $J_3 > J_1$; no caso $J_3 < J_1$ tem-se $d\theta/dt > 0$ e a presença de dissipação, por menor que seja, desestabiliza o movimento de rotação em torno do menor momento de inércia: o ângulo de precessão cresce continuamente com o tempo pois $d\theta/dt > 0$. É nesse sentido que o *modelo matemático* utilizado no estudo da estabilidade das soluções estacionárias é “*estruturalmente instável*”, na medida que pequenas alterações na “*estrutura*” do modelo – a introdução de uma dissipação incipiente, por exemplo – corrompem conclusões previamente estabelecidas pelo “*modelo ideal*”.

Essa discussão teórica tem importantes conseqüências práticas. No final da década de 50 Rússia e USA estavam envolvidas em uma acirrada corrida espacial e os maiores cientistas desses dois países participavam ativamente desse empreendimento. Em 1958 os USA lançaram o Explorer I Satellite, estabilizado por rotação em torno do eixo menor de inércia (tinha a forma de “charuto” da Fig.(2.7b)). Após uma revolução em torno da órbita (aproximadamente 90 minutos) o Explorer I estava tombado em um ângulo $\theta = 60^\circ$ ao invés de estar girando na posição desejada $\theta = 0^\circ$. Verificou-se, posteriormente, que a mínima *dissipação de energia*¹⁵ na antena flexível do satélite foi responsável pela instabilidade observada e a partir do Explorer I os satélites estabilizados por “spin” passaram a ter a forma de “moeda” indicada na Fig.(2.7a).

Na seção 4 algumas outras aplicações da dinâmica de corpos rígidos serão analisadas.

* * *

¹⁴ Como discutido no exercício (2.8), a perturbação dissipativa modifica prioritariamente a direção do momentum angular \mathbf{L} , deixando praticamente invariante seu módulo.

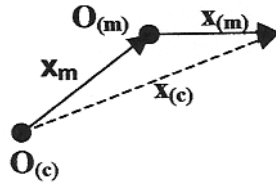
¹⁵ Ver Thomson & Reiter (1960), “*Attitude Drift of Space Vehicles*”, The Journal of Astronautical Sciences, pp. 29 – 34.

2.5: EXERCÍCIOS

2.1: (*Trabalhos Virtuais*) Sejam $\{\mathbf{F}_i(t); i = 1, 2, \dots, N\}$ as forças externas nos N pontos materiais considerados no item (2.2) e $\{\delta \mathbf{x}^i(t); i = 1, 2, \dots, N\}$ os deslocamentos virtuais desses pontos materiais. Pede-se:

a) Considerando a mudança de origem $O_{(c)} \rightarrow O_{(m)}$ do sistema coordenado com

$$\mathbf{x}_{(c)}^i = \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{(m)}^i$$



mostrar que

$$\begin{aligned} \circ \delta \mathbf{x}^i &= \delta \mathbf{x}_{c,e} + \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{(c)}^i = \delta \mathbf{x}_{m,e} + \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{(m)}^i; \\ \circ \delta \mathbf{x}_{m,e} &= \delta \mathbf{x}_{c,e} + \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_m, \end{aligned}$$

com $\delta \mathbf{x}_{c,e}$ e $\delta \mathbf{x}_{m,e}$ sendo os deslocamentos virtuais de $O_{(c)}$ e $O_{(m)}$;

b) Utilizar a expressão do trabalho virtual (ver (2.4b))

$$\delta \tau = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(t) \cdot \delta \mathbf{x}^i = \mathbf{F}(t) \cdot \delta \mathbf{x}_{c,e} + \mathbf{N}_c(t) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}(t) \cdot \delta \mathbf{x}_{m,e} + \mathbf{N}_m(t) \cdot \delta \boldsymbol{\theta},$$

para derivar a identidade (ver (2.8c))

$$\mathbf{N}_m(t) = \mathbf{N}_c(t) - \mathbf{x}_m \wedge \mathbf{F}(t).$$

* * *

2.2: Considerando a mudança de origem definida no item (a) do exercício anterior, pede-se:

a) Mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_c &= \mathbf{J}_m + \Delta \mathbf{J}; \\ \Delta \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} &= -m \cdot \mathbf{x}_m \wedge (\mathbf{x}_m \wedge \mathbf{v}); \end{aligned}$$

b) Utilizar as identidades (ver (2.8b))

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{N}_m(t) = \mathbf{N}_c(t) - \mathbf{x}_m \wedge \mathbf{F}(t); \\ \mathbf{J}_m &= \mathbf{J}_c - \Delta \mathbf{J},\end{aligned}$$

e (2.5c) para derivar a relação

$$\mathbf{x}_m \wedge \left\{ \mathbf{F}(t) - m \cdot \frac{D^2 \mathbf{x}_m}{Dt^2} \right\} + \mathbf{J}_c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}_c(t);$$

c) Verificar, com o auxílio de (2.5b), a expressão (2.8a).

* * *

2.3: (*Conservação da Quantidade de Movimento Angular*) Seja $O_{(c)}$ a origem de um sistema coordenado fixo em um *corpo rígido* e $\{\mathbf{e}_x; \mathbf{e}_y; \mathbf{e}_z\}$ os versores desse sistema. Sejam também $\mathbf{x}_{o,e}(t)$ o vetor posição de $O_{(c)}$ em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço e $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_x(t)\mathbf{e}_x + \omega_y(t)\mathbf{e}_y + \omega_z(t)\mathbf{e}_z$ a velocidade angular. Pede-se:

a) Se m for a massa do corpo e \mathbf{x}_m for o vetor posição do *centro de massa* no sistema coordenado utilizado, mostrar que a energia cinética é dada por

$$\mathcal{T}(\dot{\mathbf{x}}_{o,e}; \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} m \cdot \dot{\mathbf{x}}_{o,e}^2 + m \dot{\mathbf{x}}_{o,e} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_m) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega};$$

b) Fazendo $\mathbf{J}_c = \mathbf{J}_m + \Delta \mathbf{J}$ mostrar que

$$\begin{aligned}\circ \mathbf{P}(t) &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{o,e}} = m \cdot \dot{\mathbf{x}}_{o,e} + m \cdot \frac{D\mathbf{x}_m}{Dt} = m \cdot \dot{\mathbf{x}}_{m,e}; \\ \circ \mathbf{L}_c(t) &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{x}_m \wedge \mathbf{P}(t) + \mathbf{J}_m \cdot \boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

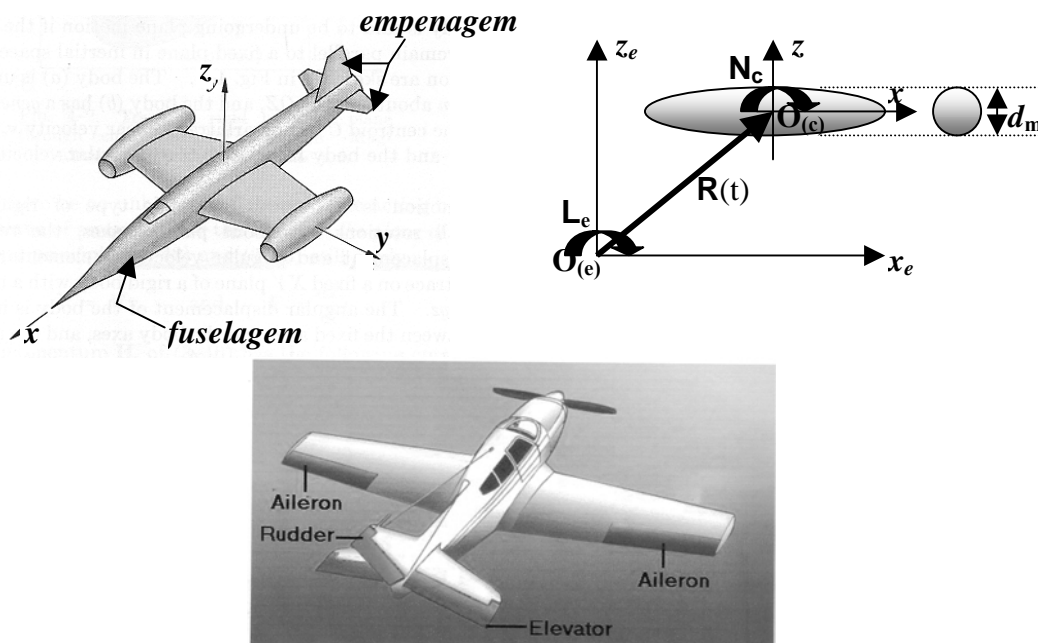
e interpretar a expressão da *quantidade de movimento angular* $\mathbf{L}_c(t)$;

c) Com o auxílio de (2.8c) verificar a relação (ver (2.11c))

$$\frac{D\mathbf{L}_c}{Dt} + \dot{\mathbf{x}}_{o,e} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{N}_c.$$

* * *

2.4: (Momento de Munk) A fuselagem de um avião, esquematicamente representada na figura abaixo, pode ser identificada com um corpo de revolução alongado e seja $\mathbf{U} = U_x \mathbf{e}_x + U_y \mathbf{e}_y + U_z \mathbf{e}_z$ sua velocidade. Pode-se supor $U_y = 0$ e $U_z \ll U_x$ uma perturbação causada na velocidade de avanço U_x por uma turbulência atmosférica. O ângulo de ataque é $\alpha = U_z/U_x \ll 1$ e devido á quebra de simetria no escoamento ($\alpha \neq 0$) surge na aeronave um momento aerodinâmico $\mathbf{N} = N_y \mathbf{e}_y$ denominado *momento de Munk*. Pretendemos verificar se esse momento tende a *aumentar* ou *diminuir* o ângulo de ataque α : no primeiro caso a aeronave será *direcionalmente instável* e só poderá manter seu curso ou por um contínuo acionamento das superfícies de controle (airelão (“aileron”) nas pontas das asas, leme (“rudder”) na empenagem vertical e profundor (“elevator”) na horizontal) ou por superfícies fixas (empenagem) que contrabalançam o efeito do momento de Munk. Pede-se:



a) Quando o avião se desloca através do ar ele induz um escoamento no fluido, tanto mais intenso quanto maior for a perturbação causada. Justificar por que a energia cinética do fluido pode ser expressa na forma,

$$\mathcal{T}_f = \frac{1}{2} [M_{xx} \cdot U_x^2 + M_{zz} \cdot U_z^2],$$

onde M_{xx} , a *massa adicional para movimento longitudinal*, é muito menor que M_{zz} , a *massa adicional para movimento lateral*;

b) Mostrar que

- $\mathbf{P}(t) = M_{xx} \dot{U}_x(t) \mathbf{e}_x + M_{zz} \dot{U}_z(t) \mathbf{e}_z$;
- $\mathbf{L}_e(t) = \mathbf{R}(t) \wedge \mathbf{P}(t)$;

b) A força $\mathbf{F}(t)$ e momento $\mathbf{N}(t)$ aplicadas no corpo são iguais e de sinais contrários á força e momento aplicadas no fluido. Mostrar que¹⁶

- $\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -[M_{xx} \ddot{U}_x \mathbf{e}_x + M_{zz} \ddot{U}_z \mathbf{e}_z]$;
- $\mathbf{N} = -\mathbf{N}_c = -\mathbf{U} \wedge \mathbf{P} = (M_{zz} - M_{xx}) U_x^2 \alpha \mathbf{e}_y$,

e verificar que o momento de Munk é desestabilizador. Mostrar que a empenagem na ré da aeronave mobiliza uma força de sustentação e um momento com sinal oposto ao do momento de Munk ;

c) Se a fuselagem for uma superfície de rotação, como suposto, $M_{zz} = \rho_{ar} \cdot V_{(fus)}$ onde $V_{(fus)}$, o volume da fuselagem, pode ser escrito na forma $V_{(fus)} = \frac{1}{4} \pi d_m^2 \cdot l_{(eq)}$, com d_m sendo o máximo diâmetro e $l_{(eq)}$ o comprimento equivalente da fuselagem; de outro lado podemos desprezar M_{xx} face a M_{zz} para um corpo alongado como esse. O coeficiente de sustentação na empenagem pode ser estimado pela expressão

$$C_L = \frac{L_s}{\frac{1}{2} \rho_{ar} U_x^2 S_{(emp)}} = 2\pi\alpha,$$

com $S_{(emp)}$, a área da empenagem, podendo ser aproximada por $\frac{1}{4} s_{(emp)}^2$, com $s_{(emp)}$ sendo a envergadura total da empenagem (verificar essa aproximação no esquema apresentado na figura acima). O momento devido à empenagem estabiliza a aeronave se for maior que o momento de Munk. Mostrar que essa condição é satisfeita se

$$\frac{S_{(emp)}}{d_m} \approx \sqrt{2}.$$

Essa condição é realista para as aeronaves usuais?

* * *

¹⁶ A força \mathbf{F} no corpo é dominada por efeitos viscosos não incorporados nessa análise; veja, em particular, que nesse modelo a força no corpo anula-se para um movimento não acelerado, um resultado certamente discordante com as evidências experimentais. O *Momento de Munk*, no entanto, é não nulo mesmo para velocidade uniforme e o valor estimado por essa expressão é próximo do valor observado experimentalmente.

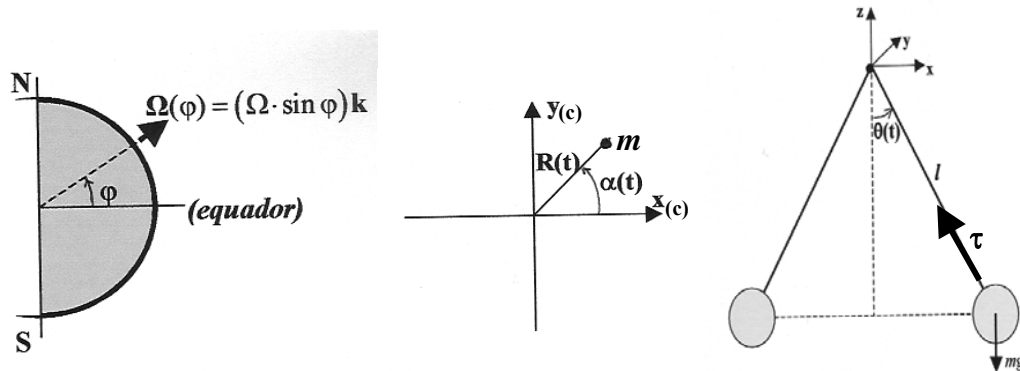
2.5: (Pêndulo de Foucault): Considerando um sistema coordenado $\mathbf{x}_{(c)} = x_{(c)}\mathbf{i} + y_{(c)}\mathbf{j} + z_{(c)}\mathbf{k}$ que gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em relação a um sistema coordenado fixo no espaço (*sistema inercial*) pede-se:

a) Se $\boldsymbol{\omega}$ não variar com o tempo mostrar que a equação que rege o movimento de uma partícula de massa m sujeita a uma força externa \mathbf{F} é dada por (ver (1.9a))

$$m \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{(c)} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}}_{(c)}) - m \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{(c)}).$$

Identificar as parcelas do lado direito nessa equação;

b) Seja um sistema coordenado $\mathbf{x}_{(c)} = (x_{(c)}; y_{(c)}; z_{(c)})$ tangente à superfície terrestre na latitude φ , com o eixo $z_{(c)}$ apontando na direção da vertical local, conforme indicado na figura abaixo, e o eixo $x_{(c)}$ tangente ao meridiano.



Sendo $\Omega = 2\pi/24$ rad/hora a velocidade angular de rotação da Terra, mostrar que

$$\boldsymbol{\Omega} = -(\Omega \cdot \cos \varphi)\mathbf{i} + (\Omega \cdot \sin \varphi)\mathbf{k}.$$

Observando que a velocidade vertical da massa é desprezível – ver item (c) – justificar porque podemos ignorar a contribuição da parcela $(\Omega \cdot \cos \varphi)\mathbf{i}$;

c) Se τ for a tensão no cabo, $\theta(t)$ o ângulo do pêndulo e $(R; \alpha)$ forem as coordenadas polares no plano horizontal $(x_{(c)}; y_{(c)})$, derivar a equação do pêndulo

- $m\ddot{x}_{(c)} = -(\tau \cdot \sin \theta) \cos \alpha + 2m(\Omega \cdot \sin \varphi) \cdot \dot{y}_{(c)} + m(\Omega \cdot \sin \varphi)^2 \cdot x_{(c)}$;
- $m\ddot{y}_{(c)} = -(\tau \cdot \sin \theta) \sin \alpha - 2m(\Omega \cdot \sin \varphi) \cdot \dot{x}_{(c)} + m(\Omega \cdot \sin \varphi)^2 \cdot y_{(c)}$;
- $m\ddot{z}_{(c)} = -mg + \tau \cdot \cos \theta$;

c) Supondo $\theta \ll 1$ e utilizando as aproximações

$$z_{(c)} = l \cdot \cos \theta(t) \cong l + \mathcal{O}(\theta^2);$$

$$R(t) = l \cdot \sin \theta(t) \cong l \cdot \theta(t) + \mathcal{O}(\theta^3),$$

verificar que o movimento do pêndulo reduz-se ao plano horizontal e é regido pelas equações

$$\circ \ddot{x}_{(c)} + \frac{g}{l} x_{(c)} = 2(\Omega \cdot \sin \varphi) \cdot \dot{y}_{(c)} + (\Omega \cdot \sin \varphi)^2 \cdot x_{(c)};$$

$$\circ \ddot{y}_{(c)} + \frac{g}{l} y_{(c)} = -2(\Omega \cdot \sin \varphi) \cdot \dot{x}_{(c)} + (\Omega \cdot \sin \varphi)^2 \cdot y_{(c)};$$

d) Utilizando as coordenadas polares $\{x_{(c)} = R(t) \cdot \cos \alpha(t); y_{(c)} = R(t) \cdot \sin \alpha(t)\}$ mostrar que a (única) solução do sistema acima é dada por

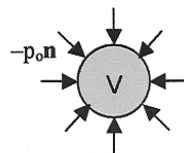
$$\circ \dot{\alpha} = -\Omega \cdot \sin \varphi;$$

$$\circ \ddot{R} + \frac{g}{l} R = 0.$$

Interpretar esse resultado identificando a “força” que faz o plano vertical de oscilação do pêndulo girar. Qual é a velocidade e o sentido desse giro?

* * *

2.6: (Ciclones e Circulação nos Oceanos): Pretendemos estudar alguns aspectos globais do escoamento do ar (da água) na atmosfera terrestre (no oceano). O raio terrestre é da ordem de 6000km e a atmosfera (ou o oceano) tem uma espessura da ordem de 20km (ou uma profundidade da ordem de 4km)¹⁷: em larga medida, portanto, o deslocamento de grandes massas de ar (ou de água no oceano) se dá no “plano horizontal” $\mathbf{x}_h = x_{(c)}\mathbf{i} + y_{(c)}\mathbf{j}$ e seja $\mathbf{u}(\mathbf{x}_h, t) = u(\mathbf{x}_h, t)\mathbf{i} + v(\mathbf{x}_h, t)\mathbf{j}$ o campo de velocidades no fluido. Supondo fluido ideal – isso é, ignorando a influência da viscosidade do fluido – a única força de contacto é a pressão $p_o(\mathbf{x}_h, t)$. Pede-se:



\mathbf{n} : normal apontando para fora de V .

¹⁷ A profundidade do oceano comparada com a sua extensão está, grosso modo, na mesma proporção que a espessura de uma folha de papel A4 para seu perímetro.

a) Tomando uma partícula fluida de volume $V \rightarrow 0$, utilizar o Teorema da Divergência para mostrar que

$$\mathbf{F} = -\int_S p_o \mathbf{n} \, dS = -\int_V \nabla p_o \, dV = -\nabla p_o \cdot V + \mathcal{O}(V^{4/3});$$

b) No *plano horizontal* a única “força externa” aplicada à partícula fluida é $\mathbf{F} = -\nabla p_o \cdot V$. Se ρ for a densidade do fluido e $\mathbf{a}(\mathbf{x}_h, t)$ for a aceleração da partícula fluida no plano horizontal, utilizar a expressão do item (a) no exercício (2.5) para mostrar, no limite $V \rightarrow 0$, que

- $\rho \mathbf{a} + 2\rho(\boldsymbol{\Omega} \cdot \sin \varphi)(\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}) = -\nabla p_o - \rho(\boldsymbol{\Omega} \cdot \sin \varphi)^2 \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{x}_h)$;
- $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

Nota: Como no exercício (2.5) a parcela $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \cos \varphi)\mathbf{i}$ do vetor $\boldsymbol{\Omega}$ pode ser ignorada pois o movimento no plano vertical é desprezado na presente discussão.

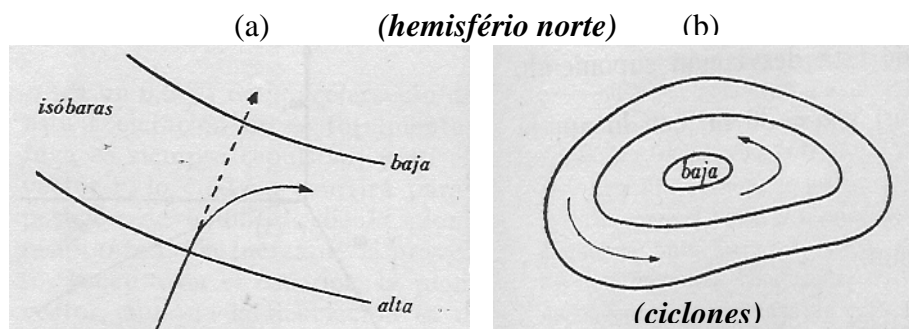
c) Definindo

$$p = p_o - \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{\Omega} \cdot \sin \varphi)^2 (x_{(c)}^2 + y_{(c)}^2)$$

mostrar que os campos de velocidade e “pressão” satisfazem as equações

- $\rho \mathbf{a} + 2\rho(\boldsymbol{\Omega} \cdot \sin \varphi)(\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}) = -\nabla p$;
- $\text{div } \mathbf{u} = 0$;

d) Suponha que a massa fluida, inicialmente parada, começa a se movimentar sob a ação de um certo campo de pressão. Mostrar que no início essa massa fluida tende a se deslocar das regiões de alta pressão para as regiões de baixa pressão, como esquematicamente indicado na figura (a) abaixo.



Mostrar também que paulatinamente a *parcela de Coriolis* $2\rho(\Omega \cdot \sin \varphi)(\mathbf{k} \wedge \mathbf{u})$ tende a desviar a partícula fluida para a *direita* no hemisfério Norte ($\varphi > 0$) e para a *esquerda* no hemisfério Sul ($\varphi < 0$).

e) No sistema de referências preso na Terra a aceleração da partícula fluida é dada pela expressão,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u},$$

a parcela *convectiva* $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ aparecendo nessa expressão porque o campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}_h, t)$ é uma propriedade de *pontos do espaço* e a *aceleração* é uma propriedade da *partícula fluida* que passa por \mathbf{x}_h no tempo t (descrição euleriana). Nos grandes movimentos de massas de fluido o campo de pressão permanece “estacionário” por um longo intervalo de tempo τ_p (da ordem de um dia, por exemplo) e varia no espaço em uma longa escala de comprimento l_p (da ordem de centenas de quilômetros, por exemplo). Como o campo de velocidade “herda” a escala de tempo τ_p e de comprimento l_p do campo de pressão, mostrar que mesmo para ventos relativamente intensos (com velocidade da ordem de 50km/h) tem-se

$$\mathbf{a} \ll 2(\Omega \cdot \sin \varphi) \mathbf{u}$$

pelo menos nas latitudes relativamente altas ($\sin \varphi \cong \mathcal{O}(1)$);

f) Quando a aceleração \mathbf{a} é desprezível face à aceleração de Coriolis mostrar que o campo de velocidades fica dado por

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{u}_g &= \frac{1}{2\rho(\Omega \cdot \sin \varphi)} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \circ \mathbf{v}_g &= -\frac{1}{2\rho(\Omega \cdot \sin \varphi)} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Qual a divergência desse campo de velocidades? E o rotacional?

g) O campo de velocidades \mathbf{u}_g é denominado de “*aproximação geostrófica*”. Mostrar que ele é paralelo às isóbaras (linhas de pressão constante), e não ortogonal a elas, e circula no hemisfério Norte no sentido anti-horário e no hemisfério Sul no sentido horário (ver figura acima) em torno do ponto de pressão mínima;

* * *

2.7: (Raízes Múltiplas do Polinômio Característico) Seja $p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_m) = (\lambda - J_1)^2(\lambda - J_3)$ o polinômio característico do tensor de inércia \mathbf{J}_m com raiz dupla J_1 . Se $\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e}_3 = J_3 \mathbf{e}_3$ e $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$ for uma base ortonormal no plano perpendicular a \mathbf{e}_3 , pede-se:

a) Mostrar que em relação à base $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ o tensor de inércia $\mathbf{J}_m = \mathbf{J}_m^t$ é representado pela matriz

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{12} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix};$$

b) Verificar a identidade

$$\begin{bmatrix} \lambda - J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & \lambda - J_{22} \end{bmatrix} = (\lambda - J_1)^2$$

e mostrar que ela implica nas relações $J_{11} = J_{22} = J_1$ e $J_{12} = 0$;

c) Seja $\mathbf{e} = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$ um versor arbitrário no plano $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$. Mostrar que

$$\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{e} = J_1 \mathbf{e}.$$

* * *

2.8: (Explorer I) Supondo um corpo de revolução girando em torno de seu eixo de rotação \mathbf{e}_3 com uma precessão θ , como indicado na figura, seja $\Delta \mathbf{N}_m(t)$ o pequeno momento devido a forças dissipativas não modeladas. Utilizando as equações do movimento

$$\begin{aligned} \circ J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_2 &= \Delta N_1(t); \\ \circ J_1 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= \Delta N_2(t); \\ \circ J_3 \dot{\omega}_3 &= \Delta N_3(t); \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \frac{D\mathbf{L}}{Dt} = \Delta \mathbf{N}_m(t),$$

pede-se:

a) Mostrar que

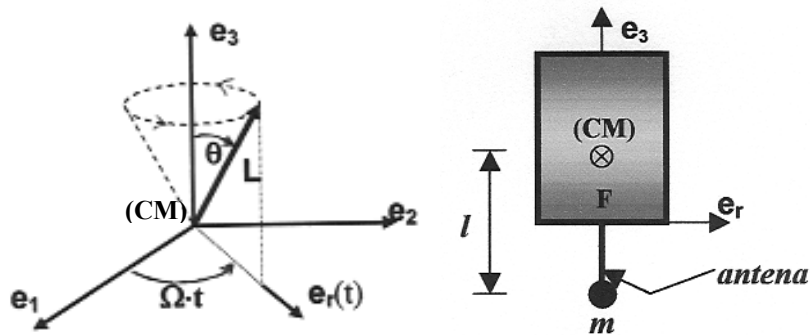
$$\begin{aligned} \circ \frac{dE}{dt} &= \Delta N_1 \cdot \omega_1 + \Delta N_2 \cdot \omega_2 + \Delta N_3 \cdot \omega_3; \\ \circ \frac{1}{2J_1} \frac{d\|\mathbf{L}\|^2}{dt} &= \Delta N_1 \cdot \omega_1 + \Delta N_2 \cdot \omega_2 + \frac{J_3}{J_1} \Delta N_3 \cdot \omega_3 = \frac{dE}{dt} + \left(\frac{J_3}{J_1} - 1 \right) \Delta N_3 \cdot \omega_3, \end{aligned}$$

e verificar a relação

$$\frac{d\|\mathbf{L}\|}{dt} = 0 \Leftrightarrow \Delta \mathbf{N}_m \perp \mathbf{L};$$

Nota: Na análise da estabilidade do Explorer I supôs-se que $\|\mathbf{L}\| = J_3\omega_0 = \text{cte}$. A intenção primordial deste exercício é verificar a veracidade dessa hipótese.

b) O satélite Explorer I possuía uma antena flexível ao longo de seu eixo de rotação \mathbf{e}_3 , como indicado na figura. A antena está engastada no ponto (F) do satélite e podemos supor, em primeira aproximação, que a massa m da antena esteja concentrada em sua extremidade, distante l do centro de massa (CM). O comprimento da antena é $b \cdot l$, com $b < 1$, e sua flexibilidade pode ser emulada por uma mola flexional K_f em (F).



Pretende-se mostrar, a seguir, que devido à ação das forças giroscópicas a antena vibra no plano $\{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_r\}$, que contém o vetor de *momentum angular* \mathbf{L} . Alguns resultados preliminares são necessários. Assim, utilizando a expressão (ver (2.19b); (2.20a)),

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{J_3}{J_1} \omega_0 \sin \theta \right) \mathbf{e}_r + \omega_0 \cos \theta \mathbf{e}_3,$$

e a fórmula cinemática $D\mathbf{f}/Dt = d\mathbf{f}/dt + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{f}$, derivar a igualdade

$$\frac{D^2 \mathbf{e}_3}{Dt^2} = \frac{J_3}{J_1} \omega_0^2 \sin \theta \left(\cos \theta + \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 \omega_0^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_3$$

e mostrar que a força de inércia na massa m da antena é dada por (*Princípio de D'Alembert*, ver (2.2a))

$$\mathbf{F}_a = -m \mathbf{a}_m = m \omega_0^2 l \left[\frac{J_3}{J_1} \sin \theta \left(\cos \theta + \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_3 \right];$$

c) Relembrando as definições $\{\Omega/\omega_3 = (J_3 - J_1)/J_1; \omega_3/\omega_0 = \cos \theta\}$, verificar a igualdade,

$$\mathbf{F}_a = -m \mathbf{a}_m = m \omega_0^2 l \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 \sin \theta \left[\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_3 \right],$$

e mostrar que o momento dessa força de inércia em relação ao ponto de engaste (F) é dado por

$$\mathbf{N}_a(t) = (-bl \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{F}_a(t) = m \omega_0^2 b l^2 \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \left[\sin \Omega t \mathbf{e}_1 - \cos \Omega t \mathbf{e}_2 \right];$$

d) Seja $\omega_n = (K_f/m(bl)^2)^{1/2}$ a frequência natural de oscilação da antena e $\varphi(t)$ o ângulo que a haste da antena faz com eixo de rotação \mathbf{e}_3 ; supondo $\Omega/\omega_n \ll 1$ – isso é, que a excitação provocada por $\mathbf{N}_a(t)$ seja *quase-estática* – mostrar que

$$\varphi(t) \cong \frac{1}{b} \left(\frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2 \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \left[\sin \Omega t \mathbf{e}_1 - \cos \Omega t \mathbf{e}_2 \right]; \quad (\Omega/\omega_n \ll 1).$$

Verificar que a oscilação da antena se dá essencialmente no plano $\{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_r\}$;

e) A dissipação no “oscilador” que representa a flexão da antena pode ser modelada pela expressão,

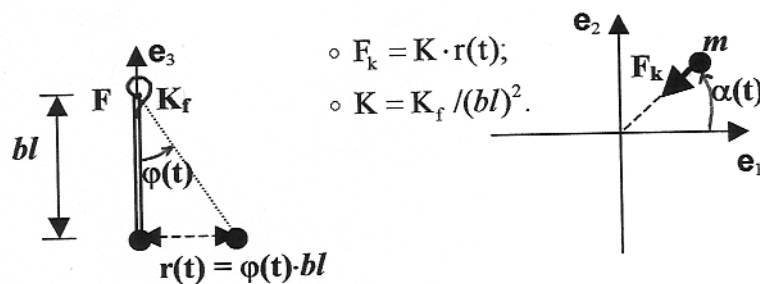
$$\Delta \mathbf{N} = -2m(bl)^2 \omega_n \zeta \cdot \dot{\varphi},$$

com ζ sendo o percentual do *amortecimento crítico*. Sendo agora \mathbf{e}_L o versor no plano $\{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_r\}$ na direção de \mathbf{L} e \mathbf{e}_\perp o versor nesse mesmo plano perpendicular ao momentum angular, mostrar que

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{N} &= -\frac{K_f}{b} \zeta \left(\frac{\omega_o}{\omega_n} \right)^3 \frac{\Omega}{\omega_o} \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 \sin 2\theta \left[\sin \theta \mathbf{e}_L + \cos \theta \mathbf{e}_\perp \right] \cong \\ &\cong -\frac{K_f}{b} \zeta \left(\frac{\omega_o}{\omega_n} \right)^3 \frac{\Omega}{\omega_o} \left(\frac{J_3}{J_1} \right)^2 \sin 2\theta \mathbf{e}_\perp; \end{aligned} \quad (\theta \ll 1),$$

onde θ é o *ângulo de precessão*. Discutir as aproximações efetuadas nesse desenvolvimento e justificar por que a hipótese $\|\mathbf{L}\| = J_3\omega_o = \text{cte.}$ é consistente em primeira aproximação;

f) A oscilação da antena é de pequena amplitude ($\varphi \ll 1$) e a massa m movimenta-se no plano $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2\}$.



Sendo

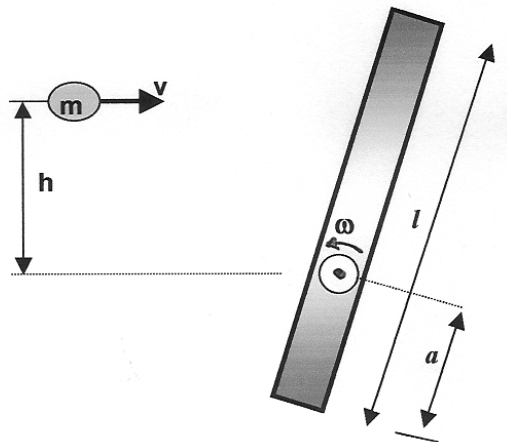
- $\circ x_1(t) = r(t) \cdot \cos \alpha(t);$
- $\circ x_2(t) = r(t) \cdot \sin \alpha(t),$

as coordenadas da massa m e considerando a *força de restauração* $\mathbf{F}_k(t) = K \cdot \mathbf{r}(t)$ devida à *mola flexional*, derivar as equações do movimento da massa m e verificar diretamente o resultado obtido no item (d). O que ocorre quando $\Omega \approx \omega_n$?

* * *

2.9: (*Conservação da quantidade de movimento angular*) Considere uma barra de madeira de comprimento l , com densidade uniforme e massa m_b girando com velocidade angular ω em torno de uma articulação distante a de sua extremidade,

conforme indicado na figura. Seja também um projétil com massa m e velocidade v deslocando-se na direção da barra a uma distância h da articulação. Pede-se:



a) Se x for o eixo longitudinal da barra, calcular a velocidade $v_{\perp}(x)$ devida ao movimento de rotação e, a partir dela, a energia cinética T_b e a quantidade de movimento angular L_b . Verificar a relação

$$L_b = \frac{\partial T_b}{\partial \omega} ;$$

b) Supondo que o projétil atinja a barra, a penetre e fique a ela solidário, determinar a velocidade angular do conjunto após o choque. De que parâmetro a mais essa velocidade angular final depende? Se ΔT for a diferença entre a energia cinética final do conjunto e a inicial, mostrar que $\Delta T < 0$. Por que a fricção entre o projétil e a barra não afeta o cálculo da quantidade de movimento angular? Para qual velocidade do projétil o conjunto fica parado?

(Prova de PEM 2200-2007)

* * *

$$\begin{aligned}
& \circ \mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)} = \mathbf{F}_{(g)}(t) + \mathbf{V}_{(g)}(t); \\
& \circ \mathbf{S}(\mathbf{X}_{(g)}; t) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \dot{\mathbf{X}}_{(g)} = -\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}, \quad (\mathbf{R}_{(g)}^t = \nabla \mathbf{S})
\end{aligned} \tag{3.2a}$$

com $\mathbf{m}_{(g)}$, $\mathbf{F}_{(g)}(t)$ e $\mathbf{V}_{(g)}(t)$ sendo, respectivamente, o *tensor de inércia simétrico* ($m_{ij} = m_{ji}$), a *força externa aplicada* e a *força de vínculo*, representados todos por seus componentes em uma certa base \mathbf{g} .

O sistema (3.2a) é definido por $n + p$ equações – as n dinâmicas e as p condições de vínculo – e possui, como incógnitas, as n componentes do vetor posição $\mathbf{X}_{(g)}(t)$ e as p componentes linearmente independentes da força de vínculo $\mathbf{V}_{(g)}(t)$. Como será visto a seguir, a “geometria” das condições de vínculo ajuda a encontrar uma expressão conveniente para $\mathbf{V}_{(g)}(t)$, explicitando suas p componentes linearmente independentes. Consideremos, primeiro, as hiper-superfícies $(n-1)$ -dimensionais $\{S^\theta(\mathbf{X}_{(g)}; t) = 0; \theta = 1, 2, \dots, p\}$ isoladamente, com normais definidas pelas expressões $\{\mathbf{N}_\theta = (\nabla S^\theta)^t; \theta = 1, 2, \dots, p\}$; a intersecção dessas hiper-superfícies define a hiper-superfície de vínculo p -dimensional $\mathbf{S}(\mathbf{X}_{(g)}; t) = \mathbf{0}$ com plano normal em $\mathbf{X}_{(g)}$ definido pelos vetores $\mathbf{N} = \sum \varphi^\theta \mathbf{N}_\theta = \sum \varphi^\theta (\nabla S^\theta)^t = \mathbf{R}_{(g)} \cdot \boldsymbol{\varphi}$, como discutido no exemplo mais abaixo.

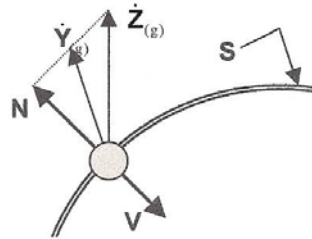


FIG.(3.1): Hiper-superfície de vínculo $\mathbf{S}(\mathbf{X}_{(g)}; t) = \mathbf{0}$ e força de vínculo $\mathbf{V}_{(g)}(t)$.
 ○: Vetor posição $\mathbf{X}_{(g)}$; —▶: Velocidades possíveis ($\dot{\mathbf{Y}}_{(g)}; \dot{\mathbf{Z}}_{(g)}$).

A força de vínculo $\mathbf{V}_{(g)}(t)$ impede que o ponto representativo $\mathbf{X}_{(g)}(t)$ se descole da superfície¹⁸ \mathbf{S} : para um *vínculo ideal* ela deve estar contida no *plano normal*, como indicado na Fig.(3.1), ou $\mathbf{V}_{(g)}(t) = -\mathbf{R}_{(g)} \cdot \boldsymbol{\varphi}$, com $\boldsymbol{\varphi}$ sendo um vetor p -dimensional a ser determinado. Portanto

$$\begin{aligned}
& \circ \mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)} = \mathbf{F}_{(g)}(t) - \mathbf{R}_{(g)} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t); \\
& \circ \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \dot{\mathbf{X}}_{(g)} = -\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}. \quad (\mathbf{R}_{(g)} = [\mathbf{R}_\alpha^i]; \mathbf{R}_{(g)}^t = [\mathbf{R}_i^\alpha])
\end{aligned} \tag{3.2b}$$

¹⁸ Para encurtar a notação designaremos, vez ou outra, a hiper-superfície $\mathbf{S}(\mathbf{X}_{(g)}; t) = \mathbf{0}$ (ou $S^\theta(\mathbf{X}_{(g)}; t) = 0$) simplesmente por \mathbf{S} (ou S^θ).

Como um exemplo ilustrativo, consideremos no espaço tri-dimensional ($n = 3$) as superfícies $S^1(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - r_o^2(t) = 0$ e $S^2(x,y,z) = z = 0$, com a função $r_o^2(t)$ dada. A intersecção é o círculo $x^2 + y^2 - r_o^2(t) = 0$ com normal $\mathbf{N} = 2\varphi_1(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + (2\varphi_1 z + \varphi_2)\mathbf{k} = a \mathbf{e}_r + b \mathbf{k}$, onde \mathbf{e}_r é o versor radial no plano $z = 0$. Se uma partícula for obrigada a se deslocar neste círculo a força de vínculo ideal é certamente paralela a \mathbf{N} e como

$$\mathbf{R}_{(g)}^t(\mathbf{X}_{(g)}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \begin{Bmatrix} -2r_o \dot{r}_o \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.2c)$$

a velocidade da partícula está no plano $z = 0$ tendo componente radial igual a dr_o/dt , um resultado obviamente esperado.

A matriz $\mathbf{R}_{(g)}$ é retangular de ordem ($n \times p$), com $p < n$, e os vínculos são linearmente independentes quando o *posto* (“rank”) de $\mathbf{R}_{(g)}$ for igual a p ; ou, o que resulta no mesmo, quando $\mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \mathbf{R}_{(g)}$ for não singular. A parcela $-(\partial \mathbf{S}/\partial t)$ na condição de vínculo pode ser eliminada através de um procedimento formalmente simples. De fato, efetuando o cálculo indicado abaixo,

$$\left. \begin{array}{l} \circ \varphi^{(S)} = -(\mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \mathbf{R}_{(g)})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}; \\ \circ \dot{\mathbf{X}}_{(g)}^{(S)} = \mathbf{R}_{(g)} \cdot \dot{\varphi}^{(S)}; \end{array} \right\} \Rightarrow (\dot{\mathbf{X}}_{(g)} = \dot{\mathbf{X}}_{(g)}^{(0)} + \dot{\mathbf{X}}_{(g)}^{(S)}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ \mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)}^{(0)} = \mathbf{F}_{(g)}(t) - \mathbf{R}_{(g)} \cdot \varphi(t) - \mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)}^{(S)}; \\ \circ \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \dot{\mathbf{X}}_{(g)}^{(0)} = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

e redefinindo $\{\mathbf{X}_{(g)} \leftarrow \mathbf{X}_{(g)}^{(0)}; \mathbf{F}_{(g)} \leftarrow \mathbf{F}_{(g)} - \mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)}^{(S)}\}$, o sistema (3.2b) reduz-se à forma canônica

$$\left. \begin{array}{l} \circ \mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)} = \mathbf{F}_{(g)}(t) - \mathbf{R}_{(g)} \cdot \varphi(t); \\ \circ \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \dot{\mathbf{X}}_{(g)} = \mathbf{0}, \end{array} \right\} \quad (3.2d)$$

a influência do termo $-(\partial \mathbf{S}/\partial t)$ aparecendo na forma redefinida da forçante $\mathbf{F}_{(g)}(t)$.

As componentes de $\varphi(t)$ são denominadas “*multiplicadores de Lagrange*” e uma observação merece destaque aqui: a condição de *incompressibilidade* no escoamento de um fluido fornece um vínculo geométrico, de preservação de volume, e o campo de *pressão* é o multiplicador de Lagrange associado. Esta interpretação é particularmente visível na equação fluida de Navier-Stokes discretizada pelo Método dos Elementos Finitos; em particular, o sistema discreto então obtido tem uma estrutura idêntica a (3.2d).

O vetor força $(-\mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)} + \mathbf{F}_{(g)}(t) - \mathbf{R}_{(g)} \cdot \varphi(t))$ é nulo em \mathbb{R}_n e assim

$$\mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)} = \mathbf{F}_{(g)}(t) - \mathbf{R}_{(g)} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot (-\mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)} + \mathbf{F}_{(g)}(t) - \mathbf{R}_{(g)} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t)) = 0 \\ \text{para todo } \Delta \mathbf{X}_{(g)} \in \mathbf{R}_n. \end{cases} \quad (3.3a)$$

As duas expressões acima definem formas equivalentes de apresentar o mesmo resultado, mas a segunda permite uma interpretação¹⁹ em termos de *trabalho* extremamente útil em diferentes contextos; em particular, ela é a motivação original da assim denominada “*formulação fraca*” dos problemas de valor de contorno definidos em um continuum, base teórica do Método dos Elementos Finitos discutida nos exercícios (3.1) a (3.3).

A equação (3.3a) continua a apresentar, no entanto, as forças de vínculo associadas e é neste ponto que Lagrange introduziu o conceito central da Mecânica Analítica, o “*deslocamento virtual*”. Os vetores $\{\Delta \mathbf{Y}_{(g)}; \Delta \mathbf{Z}_{(g)}\}$ representam “*deslocamentos possíveis*” do sistema dinâmico quando satisfazem as condições de vínculo impostas. De (3.2b) tem-se, portanto,

$$\left. \begin{array}{l} \circ \Delta \mathbf{Y}_{(g)} = \dot{\mathbf{Y}}_{(g)} \cdot \Delta t; \\ \circ \Delta \mathbf{Z}_{(g)} = \dot{\mathbf{Z}}_{(g)} \cdot \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \Delta \mathbf{Y}_{(g)} = \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \Delta \mathbf{Z}_{(g)} = -\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \cdot \Delta t. \quad (3.3b)$$

Um deslocamento $\delta \mathbf{X}_{(g)}$ é dito “*virtual*” quando definido pela *diferença* entre dois *deslocamentos possíveis*. De (3.3b) segue que

$$(\delta \mathbf{X}_{(g)} : \text{“deslocamento virtual”}) \Leftrightarrow \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \delta \mathbf{X}_{(g)} = \mathbf{0}. \quad (3.3c)$$

O conjunto dos deslocamentos virtuais define o sub-espço linear $(n - p)$ dimensional $\mathbf{R}_v \subset \mathbf{R}_n$ constituído pelos vetores ortogonais ao p -dimensional sub-espço $\mathbf{R}_{v,\perp}$ gerado pelos vetores coluna de $\mathbf{R}_{(g)}$. O sub-espço $\mathbf{R}_{v,\perp}$ é o complemento ortogonal de \mathbf{R}_v – isso é, $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_v \oplus \mathbf{R}_{v,\perp}$ – e define o hiper-plano normal à superfície de vínculo \mathbf{S} no ponto $\mathbf{X}_{(g)}$ no instante t .

Observando a identidade $\delta \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{R}_{(g)} \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$ de (3.2d) tem-se

$$\left. \begin{array}{l} \circ \delta \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{(g)} = \delta \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{F}_{(g)} \text{ para todo } \delta \mathbf{X}_{(g)} \in \mathbf{R}_v; \\ \circ \mathbf{R}_{(g)}^t \cdot \dot{\mathbf{X}}_{(g)} = \mathbf{0} \text{ ou } \dot{\mathbf{X}}_{(g)} \in \mathbf{R}_v. \end{array} \right\} \quad (3.4a)$$

¹⁹ Ela permite, por exemplo, que se interprete o problema dinâmico como um *problema de equilíbrio* se considerarmos a força de inércia com o sinal trocado como uma força aplicada. Este é o *Princípio de D’Alembert* da Mecânica.

Este é o celebrado *Princípio dos Trabalhos Virtuais* da Mecânica Analítica, que desempenha papel notável no desenvolvimento da teoria, mormente no caso dos *sistemas contínuos* como o do escoamento de um fluido, por exemplo; em particular, é através desse Princípio que a questão da discretização pelo Método dos Elementos Finitos é naturalmente encaminhada, como discutido no exercício (3.3): o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* da Mecânica Analítica é, no jargão matemático, uma “*formulação fraca*” do problema de valor de contorno associado.

3.2: EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Para completar a análise de (3.4a), resta cumprir a condição geométrica de vínculo, que é naturalmente satisfeita no procedimento formal indicado a seguir; é importante realçar, no entanto, que a importância operacional deste procedimento é restrita, posto que de difícil execução prática: sua importância reside no panorama conceitual que oferece, como explicitado mais adiante.

Seja assim $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_{n-p}\}$ uma base (local) do sub-espaço R_v , tangente no ponto $\mathbf{X}_{(g)}(t)$ da trajetória do sistema à superfície de vínculo \mathbf{S} ; por exemplo, se \mathbf{S} for uma esfera imersa no espaço tri-dimensional, $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2\}$ define o plano tangente em $\mathbf{X}_{(g)}$. Os vetores $\{\delta\mathbf{X}_{(g)}; \dot{\mathbf{X}}_{(g)}\} \in R_v$ podem ser representados na forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}_{(g)}; t) = [\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_{n-p}]_{(n; n-p)} \Rightarrow \begin{cases} \delta\mathbf{X}_{(g)} = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{q}; \\ \dot{\mathbf{X}}_{(g)} = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \end{cases} \quad (3.4b)$$

com $\mathbf{q}(t) = \{q^1(t); q^2(t); \dots; q^{n-p}(t)\}^t$ sendo *coordenadas generalizadas* do sistema dinâmico vinculado. Colocando (3.4b) em (3.4a) obtém-se

$$\delta\mathbf{q}^t \cdot \left\{ \mathbf{B}^t \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \right\} = \delta\mathbf{q}^t \cdot \{ \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{F}_{(g)} \}$$

ou

$$\delta\mathbf{q}^t \cdot \left\{ \frac{d}{dt} [(\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B}) \cdot \dot{\mathbf{q}}] - \frac{d\mathbf{B}^t}{dt} \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right\} = \delta\mathbf{q}^t \cdot \{ \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{F}_{(g)} \}. \quad (3.4c)$$

A equação acima pode ser expressa em termos da energia cinética,

$$\mathcal{T}(\mathbf{X}_{(g)}, \dot{\mathbf{X}}_{(g)}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}_{(g)}^t \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \dot{\mathbf{X}}_{(g)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B}) \cdot \dot{\mathbf{q}},$$

do sistema dinâmico, pois

$$\left. \begin{array}{l} \circ \mathbf{m}_{(q)}(\mathbf{q}; t) = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B}; \\ \circ \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{m}_{(q)} \cdot \dot{\mathbf{q}}; \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{m}_{(q)} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.5a)$$

A força externa $\mathbf{F}_{(g)}$ pode ser expressa na forma

$$\mathbf{F}_{(g)} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{X}_{(g)}} + \mathbf{Q}_{(g)}; \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{X}_{(g)}} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_{(g)}^i} \right\}_{(n;1)}, \quad (3.5b)$$

com $\mathcal{U}(\mathbf{X}_{(g)}, t)$ sendo um potencial de força e $\mathbf{Q}_{(g)}$ a parcela da força aplicada que não pode ser derivada de um potencial; observando a relação²⁰

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial X^i}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^n B_\alpha^i \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X^i} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B}^t \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{X}_{(g)}}, \quad (3.5c)$$

da invariância do trabalho virtual segue

$$\begin{array}{l} \circ \delta W = \delta \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{F}_{(g)} = \delta \mathbf{q}^t \cdot \left[-\mathbf{B}^t \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{X}_{(g)}} + \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} \right] = \delta \mathbf{q}^t \cdot \left[-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q} \right]; \\ \circ \mathbf{Q} = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)}. \end{array} \quad (3.5d)$$

Com o auxílio de (3.5a,d) a equação (3.4c) toma a forma,

$$\delta \mathbf{q}^t \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{d\mathbf{B}^t}{dt} \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} \right\} = \delta \mathbf{q}^t \cdot \mathbf{Q}, \quad (3.6a)$$

e o seguinte resultado pode ser então derivado: se $\mathbf{R}_{(g)}$ não depender explicitamente do tempo então – e isso não implica que \mathbf{S} não dependa, como exemplificado em (3.2c) – tem-se

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{X}_{(g)}) \Leftrightarrow \mathbf{m}_{(q)} = \mathbf{m}_{(q)}(\mathbf{q}), \quad (3.6b)$$

e como elaborado na seção (3.3) pode-se demonstrar, a partir de (3.6b), que

²⁰ Na seção (3.3) mostra-se que *localmente* tem-se $X^i = \Phi^i(\mathbf{q})$ para pontos na superfície de vínculo e portanto $\partial X^i / \partial q^\alpha = \partial \Phi^i / \partial q^\alpha = B_\alpha^i(\mathbf{q})$, ver (3.4b).

$$\delta \mathbf{q}^t \cdot \frac{d\mathbf{B}^t}{dt} \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \delta \mathbf{q}^t \cdot \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} . \quad (3.6c)$$

Utilizando (3.6c) em (3.6a) obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{Q} , \quad (3.7a)$$

que permite uma interpretação geométrica fundamental da dinâmica do sistema vinculado, como discutido a seguir.

E primeiro lugar, (3.7a) mostra que a *energia cinética* com o sinal trocado – e essa troca de sinal nos remete de imediato ao *Princípio de D'Alembert* introduzido na nota 19 – é um *potencial de forças* quando depende da posição \mathbf{q} do sistema. Essa dependência surge quando as equações de *vínculo* são *não-lineares*: se as funções de vínculo $\{S^\theta(\mathbf{X}_{(g)};t) = 0; \theta = 1;2; \dots ; p\}$ forem lineares em $\mathbf{X}_{(g)}$, a intersecção $\mathbf{S}(\mathbf{X}_{(g)};t) = \mathbf{0}$ define um hiper-plano $(n - p)$ -dimensional com um plano normal $\mathbf{N} = \mathbf{R}_{(g)} \cdot \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{R}_{v,\perp}$ que não varia com $\mathbf{X}_{(g)}$; neste caso, portanto, as matrizes $\{\mathbf{B}; \mathbf{m}_{(q)}\}$ não variam também com \mathbf{q} e a força potencial introduzida pela energia cinética é nula.

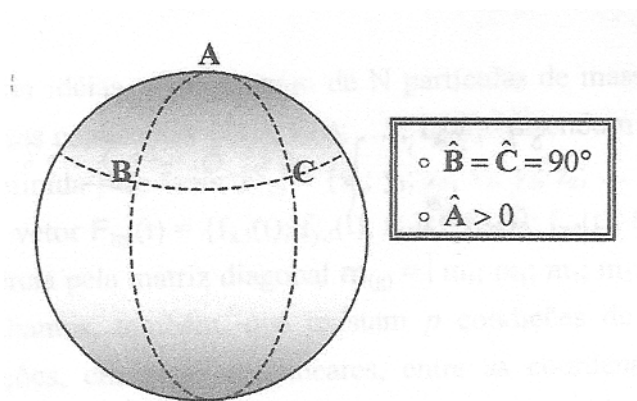


FIG.(3.2): Triângulo esférico ABC: soma dos ângulos maior que 180° .

No caso de vínculos não-lineares a hiper-superfície \mathbf{S} tem curvatura, como uma esfera, e sua *geometria intrínseca* é peculiar: como indicado na Fig.(3.2), os meridianos da esfera, por exemplo, definem “paralelas” que se encontram nos pólos e a soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior que 180° . A *geometria intrínseca* de hiper-superfícies \mathbf{S} com curvatura não é Euclidiana, é *Riemanianna*, podendo ser aproximada por uma geometria Euclidiana somente localmente, no plano tangente.

A hiper-superfície \mathbf{S} define o *espaço das configurações*, por onde o ponto representativo do sistema dinâmico caminha: as forças introduzidas pela energia cinética – pelo movimento mesmo das partículas – só aparecem, portanto, por causa da *curvatura do espaço*. Essa idéia geométrica básica, de forças que surgem devido à curvatura do espaço, foi utilizada por Einstein na Relatividade Geral, mas tem também aplicações mais prosaicas: no escoamento de um fluido, por exemplo, o *gradiente de pressão* na direção normal à linha de corrente é diretamente proporcional à *curvatura da linha de corrente*; em outras palavras, a “curvatura do espaço” (das linhas de corrente) faz aparecer uma força (o gradiente de pressão). Na realidade, essas forças são denominadas, talvez impropriamente, de *forças fictícias* na Mecânica Clássica, os exemplos mais notáveis sendo as forças de Coriolis e centrífuga.

Definindo a *Lagrangiana* $\mathcal{L}(\cdot)$ pela diferença²¹,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}, t), \quad (3.7b)$$

a equação dinâmica (3.7a) toma a forma sintética ($\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\mathbf{q}} = \{\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}^\alpha\}$ etc.)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (3.7c)$$

que define as *Equações de Lagrange* da Mecânica²².

Em muitos problemas práticos da Mecânica, um conjunto de “coordenadas generalizadas” \mathbf{q} pode ser definido por inspeção – ver, por exemplo, exercício (3.4) – e a Lagrangeana calculada, facilitando a derivação das equações dinâmicas. Sob uma ótica mais conceitual, o aspecto relevante aqui é a *estrutura invariante* desse sistema de equações: para qualquer conjunto de *coordenadas generalizadas* utilizado na descrição do sistema dinâmico a forma (3.7c) é preservada. Se utilizarmos, por exemplo, uma outra base $\{\mathbf{c}_1; \mathbf{c}_2; \dots; \mathbf{c}_{n-p}\}$ do plano tangente R_v e coordenadas generalizadas $\mathbf{r}(t) = \{r^1(t); r^2(t); \dots; r^{n-p}(t)\}^t$, o mesmo sistema (3.7c) será obtido com \mathbf{r} no lugar de \mathbf{q} . O contraste com a *formulação Newtoniana* pode ser verificado por meio de um exemplo muito simples, o deslocamento de uma partícula de massa m no plano (x,y) sob ação de um campo de força $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$. Utilizando coordenadas cartesianas ou polares tem-se

²¹ O potencial pode depender do tempo; por exemplo $\mathcal{U}(\mathbf{q}, t) = \sum Q^\alpha(t) \cdot q_\alpha$.

²² É importante lembrar que (3.7c) foi deduzida sob a hipótese $\mathbf{m}_{(q)} = \mathbf{m}_{(q)}(\mathbf{q})$, ver (3.6b). No caso particular quando $\mathbf{m}_{(q)} = \mathbf{m}_{(q)}(\mathbf{q}, t)$ a equação de Lagrange deve ser corrigida por termos que dependem de $\partial\mathbf{m}_{(q)}/\partial t$, como discutido em Pesce (2003). Essas situações não são usuais mas são importantes no estudo de foguetes, por exemplo, onde a propulsão se dá pela perda de massa do gás expelido.

$$\left. \begin{array}{l} \circ \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2); \\ \circ \delta W = \delta x \cdot F_x + \delta y \cdot F_y = \delta r \cdot F_r + \delta \theta \cdot F_\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ F_r = F_x \cdot \cos \theta + F_y \cdot \sin \theta; \\ \circ F_\theta / r = -F_x \cdot \sin \theta + F_y \cdot \cos \theta, \end{array} \right. \quad (3.8a)$$

a *força generalizada* F_θ sendo um *momento* que realiza trabalho no deslocamento angular $\delta\theta$. Utilizando como variáveis tanto as coordenadas cartesianas como as polares da partícula e aplicando as equações de Lagrange (3.7c), os seguintes sistemas são obtidos

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ m \ddot{x} = F_x; \\ \circ m \ddot{y} = F_y; \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \circ m \ddot{r} = F_r + m r \dot{\theta}^2; \\ \circ m r \ddot{\theta} = F_\theta / r - 2m \dot{r} \dot{\theta}. \end{array} \right. \quad (3.8b)$$

Ao contrário da *estrutura Lagrangeana*, que é invariante nos dois sistemas coordenados, a *estrutura Newtoniana* – $\mathbf{m} \cdot d^2 \mathbf{q} / dt^2 = \mathbf{F}$ – só se mantém se considerarmos as forças *centrífuga* e de *Coriolis* como *forças fictícias* aplicadas ao sistema.

Finalmente, se \mathbf{Q} for o vetor de força generalizado, da invariância do trabalho virtual,

$$\delta W = \delta \mathbf{q}^t \cdot \mathbf{Q} = \sum_{\alpha=1}^{n-p} \delta q^\alpha \cdot Q_\alpha, \quad (3.9a)$$

segue que as componentes Q_α de força se transformam não como as coordenadas de um vetor, mas sim como as coordenadas de um *funcional linear*.

Na Mecânica Clássica, no entanto, as forças são compreendidas como um *vetor* e essa aparente ambigüidade pode ser removida se considerarmos Q_α como as componentes do *vetor força* \mathbf{Q} não em relação à base $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_{n-p}\}$ mas em relação à *base dual* $\mathbf{b}_\perp = \{\mathbf{b}_\perp^1; \mathbf{b}_\perp^2; \dots; \mathbf{b}_\perp^{n-p}\}$ definida pela condição

$$\mathbf{b}_\alpha^t \cdot \mathbf{b}_\perp^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} = 1 & \text{se } \alpha = \beta; \\ = 0 & \text{se } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (3.9b)$$

Neste caso

$$\delta \mathbf{q}^t \cdot \mathbf{Q} = \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \mathbf{b}_\alpha^t \right) \cdot \left(\sum_{\beta} Q_\beta \mathbf{b}_\perp^\beta \right) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \delta q^\alpha Q_\beta \mathbf{b}_\alpha^t \cdot \mathbf{b}_\perp^\beta = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \delta q^\alpha Q_\beta \delta_\alpha^\beta = \sum_{\alpha} \delta q^\alpha Q_\alpha$$

e a transformação entre a base dual e a original é definida pela expressão

$$\mathbf{b}_\perp = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{b} \text{ com } \begin{cases} \circ E_{\alpha\beta} = \mathbf{b}_\alpha^t \cdot \mathbf{b}_\beta; \\ \circ \mathbf{E} = [E_{\alpha\beta}], \end{cases} \quad (3.9c)$$

como pode ser verificado com certa facilidade.

Na realidade, o *espaço dual* goza de uma identidade reconhecida na Álgebra Linear – ele é o espaço dos *funcionais lineares* – e a intenção aqui era simplesmente indicar uma motivação desse conceito na Mecânica Analítica, posto que o *trabalho virtual* é, no jargão matemático, um *funcional linear*.

3.3: EQUAÇÃO LOCAL DA SUPERFÍCIE DE VÍNCULO $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$

Dado um ponto $\mathbf{X}_o \in \mathbf{S}$, sejam R_v o hiper-plano tangente a \mathbf{S} em \mathbf{X}_o , $\{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_{n-p}\}$ uma base desse plano e \mathbf{q} as coordenadas de posição de um ponto no hiper-plano em relação a esta base. Seja também $\mathbf{X} = \mathbf{X}_o + \Delta\mathbf{X}$ um ponto arbitrário de \mathbf{S} nas vizinhanças de \mathbf{X}_o : alguns resultados obtidos na seção precedente dependem do fato da hiper-superfície de vínculo $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ poder ser representada, nas vizinhanças de \mathbf{X}_o , na forma $X^i = \Phi^i(\mathbf{q})$, isso é, em termos das coordenadas \mathbf{q} do plano tangente. O objetivo deste item é obter essa *descrição local* da hiper-superfície de vínculos $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ e, para facilitar a notação, omitimos aqui o sub-índice (g) e o tempo congelado t .

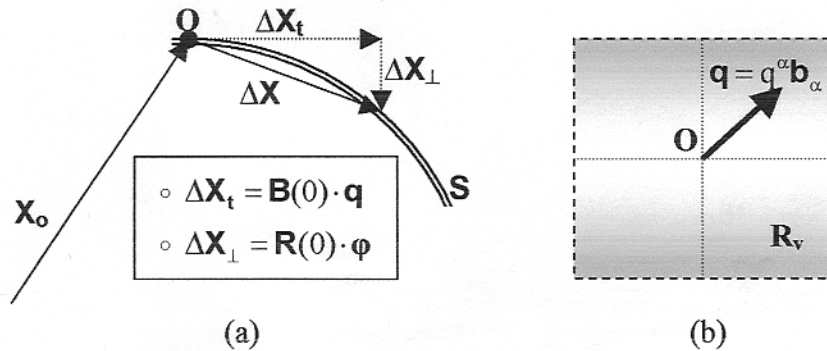


FIG.(3.3): (a) Superfície de vínculo $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$;
(b) Plano tangente R_v ($\mathbf{q} \leftrightarrow \Delta\mathbf{X}_t$).

Dado o *caráter local* da representação – isso é, ela deve valer em uma vizinhança do ponto \mathbf{X}_o identificada pela condição $\|\Delta\mathbf{X}\| \ll 1$ – expandindo em série de Taylor as funções $S^0(\mathbf{X})$ tem-se

$$\left. \begin{array}{l} \circ S^0(\mathbf{X}_o) = \mathbf{0}; \\ \circ S^0(\mathbf{X}_o + \Delta\mathbf{X}) = \mathbf{0}; \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial S^0}{\partial X^j} \right)_o \Delta X^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S^0}{\partial X^j \partial X^k} \right)_o \Delta X^j \Delta X^k + \mathcal{O}(\|\Delta\mathbf{X}\|^3) = 0,$$

onde utilizamos a *convenção de Einstein*: índices repetidos, no caso (i,j), indicam soma de $0 \leq (i,j) \leq n$. Agrupando para todos $\theta = 1, 2, \dots, p$ a seguinte relação é obtida:

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{R}^t(0) \cdot \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}^\theta}{\partial X^j \partial X^k} \right)_o \Delta X^j \Delta X^k \right\}_{(p;1)} + \mathcal{O}(\|\Delta \mathbf{X}\|^3) &= \mathbf{0}; \\ \circ \mathbf{R}^t(0) &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{S}^\theta}{\partial X^j} \right)_o \right]. \end{aligned} \quad (3.10a)$$

Relembrando que $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_v \oplus \mathbf{R}_{v,\perp}$, e assim $\Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}_t \in \mathbf{R}_v + \Delta \mathbf{X}_\perp \in \mathbf{R}_{v,\perp}$, e desprezando termos quadráticos em (3.10a), tem-se $\mathbf{R}^t(0) \cdot \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0}$ ou $\Delta \mathbf{X} \in \mathbf{R}_v$: em primeira ordem, portanto, $\Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}_t + \mathcal{O}(\|\Delta \mathbf{X}\|^2) = \mathbf{B}(0) \cdot \mathbf{q} + \mathcal{O}(\|\Delta \mathbf{X}\|^2)$ ou

$$\Delta X^k = B_\beta^k(0) \cdot q^\beta + \mathcal{O}(\|\mathbf{q}\|^2), \quad (\mathbf{q} \cong \mathcal{O}(\Delta \mathbf{X})) \quad (3.10b)$$

a convenção de soma de Einstein estando subentendida.

Numa linguagem “geométrica”, a construção da superfície \mathbf{S} pode ser assim descrita: quando $\|\mathbf{q}\| \rightarrow 0$, $\Delta \mathbf{X} \rightarrow \Delta \mathbf{X}_t = \mathbf{B}(0) \cdot \mathbf{q}$; mantendo a direção de \mathbf{q} mas aumentando seu módulo, a correção em $\Delta \mathbf{X}_t$ é dada por um $\Delta \mathbf{X}_\perp \in \mathbf{R}_{v,\perp}$ da ordem $\|\mathbf{q}\|^2 \ll \|\mathbf{q}\|$, como esquematizado na Fig.(2.16a). Uma vez definido o “meridiano” de \mathbf{S} , indicado na mesma figura pelo símbolo \mathbf{S} , “rodando” a direção \mathbf{q} no hiper-plano tangente \mathbf{R}_v , ver Fig.(2.16b), a superfície \mathbf{S} fica localmente definida nesse giro pela rotação do “meridiano”, que em geral se deforma enquanto roda, a menos que \mathbf{S} seja uma “superfície de revolução”. Numa linguagem analítica, colocando (3.10b) em (3.10a) a seguinte equação é obtida para a correção ortogonal,

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{R}^t(0) \cdot \Delta \mathbf{X}_\perp &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}^\theta}{\partial X^j \partial X^k} \right)_o B_\alpha^j(0) B_\beta^k(0) \right\}_{(p;1)} q^\alpha q^\beta + \mathcal{O}(\|\mathbf{q}\|^3); \\ \circ \Delta \mathbf{X}_\perp &= \mathbf{R}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.10c)$$

com $\{0 \leq (i,j) \leq n; 0 \leq (\alpha,\beta) \leq p-n\}$ no somatório da primeira expressão (convenção de Einstein). Colocando a segunda expressão, $\Delta \mathbf{X}_\perp = \mathbf{R}(0) \cdot \boldsymbol{\varphi}$, na primeira e observando que a matriz $\mathbf{R}^t(0) \cdot \mathbf{R}(0)$ é não singular²³, o multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\varphi}$ pode ser determinado e em seqüência o vetor $\Delta \mathbf{X}_\perp$. Definindo, para facilitar a notação,

²³ Mesmo quando esta matriz for singular – e isso ocorre quando os vínculos $S^\theta(\mathbf{X})$ tiverem um certo grau de *dependência linear* – é possível ir adiante com a análise, como usual no Método dos Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Fluidos. Neste contexto a singularidade de $\mathbf{R}^t(0) \cdot \mathbf{R}(0)$ origina os assim chamados “*modos espúrios de pressão*”.

$$\Lambda(0) = (\mathbf{R}^t(0) \cdot \mathbf{R}(0))^{-1} = [\Lambda_\theta^\gamma(0)], \quad (3.10d)$$

de (3.10c) obtém-se

$$\Delta \mathbf{X}_\perp^i = -1/2 \mathbf{R}_\gamma^i(0) \Lambda_\theta^\gamma(0) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}^\theta}{\partial \mathbf{X}^j \partial \mathbf{X}^k} \right)_o \mathbf{B}_\alpha^j(0) \mathbf{B}_\beta^k(0) q^\alpha q^\beta, \quad (3.11a)$$

o somatório em (3.11a) sendo efetuado entre os limites $\{0 \leq (j,k) \leq n; 0 \leq (\gamma,\theta) \leq p; 0 \leq (\alpha,\beta) \leq p-n\}$. Introduzindo o coeficiente

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta}^i(0) = -\mathbf{R}_\gamma^i(0) \Lambda_\theta^\gamma(0) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}^\theta}{\partial \mathbf{X}^j \partial \mathbf{X}^k} \right)_o \mathbf{B}_\alpha^j(0) \mathbf{B}_\beta^k(0) = \mathbf{C}_{\beta\alpha}^i(0), \quad (3.11b)$$

e lembrando que $\Delta \mathbf{X}_\perp^i = \mathbf{B}_\alpha^i(0) \cdot q^\alpha$, os pontos $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}^i\}$ nas vizinhanças do ponto \mathbf{X}_o e contidos na hiper-superfície de vínculo $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ têm coordenadas

$$\mathbf{X}^i = \Phi^i(\mathbf{q}) = \mathbf{X}_o^i + \mathbf{B}_\alpha^i(0) \cdot q^\alpha + 1/2 \mathbf{C}_{\alpha\beta}^i(0) \cdot q^\alpha q^\beta + \mathcal{O}(\|\mathbf{q}\|^3) \in \mathbf{S}. \quad (3.12a)$$

O caráter *local* da aproximação (3.12a) permite também estendê-la para uma *variedade*²⁴ *p-dimensional*. Toda superfície *p-dimensional* $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ suficientemente lisa é uma variedade *p-dimensional* e o que distingue esta de uma superfície é o *caráter local* da descrição: a variedade não necessita ter uma descrição *global* $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, como obrigatório para as superfícies. O conceito “variedade” foi introduzido, na matemática, como um expediente para facilitar o estudo de propriedades locais de entidades que se assemelham localmente a superfícies embora, muitas vezes, com uma descrição global ou desconhecida ou mesmo inexistente.

A expressão (3.12a) descreve, portanto, a hiper-superfície de vínculo $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ nas vizinhanças de \mathbf{X}_o e dela segue as relações

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{B}_\alpha^i(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^\alpha} = \mathbf{B}_\alpha^i(0) + \mathbf{C}_{\alpha\beta}^i(0) \cdot q^\beta; \\ \circ \frac{\partial \mathbf{B}_\alpha^i}{\partial q^\beta}(0) &= \mathbf{C}_{\alpha\beta}^i(0) = \mathbf{C}_{\beta\alpha}^i(0) = \frac{\partial \mathbf{B}_\beta^i}{\partial q^\alpha}(0). \end{aligned} \quad (3.12b)$$

Antes de prosseguir na análise, é ilustrativo aplicar esse cálculo geométrico à uma superfície cilíndrica imersa no espaço tri-dimensional. Considerando a Fig.(3.3),

²⁴ Variedade é designada “manifold” (muitas dobras) em inglês.

seja X^1 o eixo horizontal, X^2 o eixo vertical e X^3 o ortogonal ao plano da folha. A superfície é definida por

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{S}(\mathbf{X}) &= (X^1)^2 + (X^2)^2 - r_o^2 = 0; \quad (p=1) \\ \circ \nabla \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 2X^1 & 2X^2 & 0 \end{bmatrix}_{(1;3)}, \end{aligned}$$

com r_o sendo o raio do cilindro. Como $\mathbf{O} \equiv (0; r_o; X^3 = \forall)$ e o plano tangente R_v coincide com o plano (X^1, X^3) , escolhendo $\{q^1 = X^1; q^2 = X^3\}$ tem-se

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{R}^t(\mathbf{O}) &= (\nabla \mathbf{S})_o = \begin{bmatrix} 0 & 2r_o & 0 \end{bmatrix}_{(1;3)} \xrightarrow{(\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0})} \mathbf{B}(\mathbf{O}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \circ \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial X^j \partial X^k} \right) &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial X^j \partial X^k} \right) B_\alpha^j(\mathbf{O}) B_\beta^k(\mathbf{O}) q^\alpha q^\beta = 2(q^1)^2, \end{aligned}$$

e dessas expressões segue (ver (3.10c,d) observando que $\Lambda(\mathbf{O}) = 1/4r_o^2$)

$$\mathbf{R}^t(\mathbf{O}) \cdot \Delta \mathbf{X}_\perp = -\frac{1}{2} 2(q^1)^2 \Rightarrow \varphi = -\frac{(q^1)^2}{4r_o^2} \Rightarrow \Delta \mathbf{X}_\perp = \mathbf{R}(\mathbf{O}) \cdot \varphi = -\frac{1}{2} \frac{1}{r_o} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} (q^1)^2,$$

obtendo-se

$$\left. \begin{aligned} \circ C_{\alpha\beta}^i &= 0 \text{ para } i=1,3; \\ \circ C_{11}^2 &= -\frac{1}{r_o}; C_{12}^2 = C_{22}^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}_o + \begin{Bmatrix} q^1 \\ 0 \\ q^3 \end{Bmatrix} - \frac{(q^1)^2}{2r_o} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q^1 \\ r_o - (q^1)^2 / 2r_o \\ q^3 \end{Bmatrix}.$$

É evidente que \mathbf{X} satisfaz, a menos de termos da ordem $\|\mathbf{q}\|^4 \ll 1$, a equação da superfície cilíndrica e também, no ponto (\mathbf{O}) , a *curvatura* da superfície cilíndrica é definida pela expressão $\chi(q^1, q^2) = C_{\alpha\beta}^2 q^\alpha q^\beta / \|\mathbf{q}\|^2$: ela é máxima e igual a $-1/r_o$ quando $\mathbf{q} = q^1 \mathbf{b}_1$ e mínima e igual a zero na direção da geratriz X^3 ($\mathbf{q} = q^2 \mathbf{b}_2$).

O tensor $C_{\alpha\beta}^i(\mathbf{O})$ define assim a *curvatura* da superfície em (\mathbf{O}) , ver (3.12a): como $\partial T / \partial \mathbf{q} \propto \partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{q}$, de (3.12b) segue que a “força fictícia” $\partial T / \partial \mathbf{q}$ é proporcional à *curvatura do espaço* (de configurações) $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$, como já antecipado.

Voltando a (3.12b), a primeira condição foi utilizada em (3.5c) e a segunda será utilizada a seguir para demonstrar a identidade (3.6c), repetida abaixo em notação tensorial utilizando a convenção de Einstein:

$$\delta \mathbf{q}^t \cdot \frac{d\mathbf{B}^t}{dt} \cdot \mathbf{m}_{(g)} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \delta \mathbf{q}^t \cdot \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{q}} \Leftrightarrow \delta q^\gamma \frac{dB_\gamma^i}{dt} m_{ij} B_\beta^j \dot{q}^\beta = \delta q^\gamma \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^\gamma}.$$

Da definição da energia cinética,

$$\mathcal{T} = 1/2 \dot{q}^\alpha B_\alpha^i m_{ij} B_\beta^j \dot{q}^\beta,$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^\gamma} &= 1/2 \left[\dot{q}^\alpha \frac{\partial B_\alpha^i}{\partial q^\gamma} m_{ij} B_\beta^j \dot{q}^\beta + \dot{q}^\alpha B_\alpha^i m_{ij} \frac{\partial B_\beta^j}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\beta \right]_{(m_{ij}=m_{ji})} = \\ &=_{(m_{ij}=m_{ji})} 1/2 \left[\dot{q}^\alpha \frac{\partial B_\alpha^i}{\partial q^\gamma} m_{ij} B_\beta^j \dot{q}^\beta + \dot{q}^\alpha \frac{\partial B_\alpha^i}{\partial q^\gamma} m_{ij} B_\beta^j \dot{q}^\beta \right] = \\ &= \dot{q}^\alpha \frac{\partial B_\alpha^i}{\partial q^\gamma} m_{ij} B_\beta^j \dot{q}^\beta \stackrel{(2.42b)}{=} \dot{q}^\alpha \frac{\partial B_\gamma^i}{\partial q^\alpha} m_{ij} B_\beta^j \dot{q}^\beta, \end{aligned}$$

o que demonstra (3.6c) pois

$$\left(\frac{\partial B_\gamma^i}{\partial t} = 0 \text{ por hipótese, ver (2.36b)} \right) \Rightarrow \frac{dB_\gamma^i}{dt} = \frac{\partial B_\gamma^i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha.$$

Finalizando, sejam $\mathbf{b}_\perp = \{\mathbf{b}_\perp^1; \mathbf{b}_\perp^2; \dots; \mathbf{b}_\perp^{n-p}\}$ a base dual de $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n\}$, ver final do item precedente, e $\hat{\mathbf{B}}^i(\mathbf{q})$ os vetores linha de $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \{\hat{\mathbf{B}}^i(\mathbf{q})\}$ ou

$$\hat{\mathbf{B}}^i(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha=1}^{p-n} B_\alpha^i(\mathbf{q}) \mathbf{b}_\perp^\alpha = \frac{\partial \Phi^i}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.13a)$$

O resultado

$$\Phi^i(\mathbf{q}) = X_o^i + \int_0^{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{B}}^i(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} \Leftrightarrow \frac{\partial B_\alpha^i}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial B_\gamma^i}{\partial q^\alpha} \Leftrightarrow \text{"rot"} \hat{\mathbf{B}}^i(\mathbf{q}) = 0, \quad (3.13b)$$

com o sentido (\Rightarrow), foi verificado aqui e possibilita a seguinte leitura: o “rotacional” do gradiente de uma função escalar $\Phi^i(\mathbf{q})$ é nulo; o resultado inverso (\Leftarrow) decorre do Teorema de Stokes²⁵ em \mathbb{R}_n : se um campo vetorial for “irrotacional” sua integral de linha independe do percurso e define uma função de ponto $\Phi^i(\mathbf{q})$.

²⁵ Ver, a propósito, Rudin (1964), “Principles of Mathematical Analysis”, capítulo 9. Senso estrito, o “rotacional” não pode ser definido em \mathbb{R}_n para $n > 3$, a “irrotacionalidade” de um campo indicando somente a igualdade $\partial B_\alpha^i / \partial q^\gamma = \partial B_\gamma^i / \partial q^\alpha$ para todo $(\alpha; \gamma)$.

3.4: APÊNDICE: INTRODUÇÃO AOS TENSORES

Dado um espaço vetorial n -dimensional R_n munido de um *produto interno* $\langle \cdot; \cdot \rangle$, seja $\mathbf{g} \equiv \{\mathbf{g}_1; \mathbf{g}_2; \dots; \mathbf{g}_n\}^t$ uma base de R_n e \mathbf{x} um vetor desse espaço definido pelas coordenadas $\mathbf{X}_{(g)} \equiv (x_{1,g}; x_{2,g}; \dots; x_{n,g})^t_{(n \times 1)}$ em relação à base \mathbf{g} ou

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_{j,g} \mathbf{g}_j. \quad (3.14a)$$

Uma *forma bi-linear* $b(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ é uma função que associa um número real à dupla de vetores $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ com a seguinte propriedade: essa função é linear em \mathbf{x} (ou em \mathbf{y}) quando mantemos $\mathbf{y} = \text{cte.}$ (ou $\mathbf{x} = \text{cte.}$). O *produto interno*²⁶ entre os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} é uma forma bi-linear, *simétrica* ($\langle \mathbf{g}_i; \mathbf{g}_j \rangle = \langle \mathbf{g}_j; \mathbf{g}_i \rangle$), *positiva definida* ($\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) e expressa pelo duplo somatório $\sum \sum x_{i,g} y_{j,g} \langle \mathbf{g}_i; \mathbf{g}_j \rangle$ ou, na forma matricial, por

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{M}_{(g)} \cdot \mathbf{Y}_{(g)} \quad \text{com} \quad \mathbf{M}_{(g)} = \left[\langle \mathbf{g}_i; \mathbf{g}_j \rangle \right]_{(n \times n)}. \quad (3.14b)$$

Em relação à base \mathbf{g} os *vetores* são representados por n -uplas $\mathbf{X}_{(g)}$ e o *produto interno* é definido por intermédio de uma matriz $\mathbf{M}_{(g)}$ de ordem $(n \times n)$. Veremos, a seguir, que outras entidades, não só os vetores ou o produto interno, podem ser também representados por n -uplas ou por matrizes.

Consideremos, assim, uma *forma linear* $l(\cdot)$ que leva vetores $\mathbf{x} \in R_n$ nos reais e é linear em \mathbf{x} : $l(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \cdot l(\mathbf{x}) + \beta \cdot l(\mathbf{y})$. Na base \mathbf{g} essa forma linear pode ser representada pela n -upla $\mathbf{L}_{(g)} \equiv (l(\mathbf{g}_1); l(\mathbf{g}_2); \dots; l(\mathbf{g}_n))^t$ ou

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_{j,g} l(\mathbf{g}_j) = \mathbf{L}_{(g)}^t \cdot \mathbf{X}_{(g)}. \quad (3.14c)$$

De forma semelhante, um *operador linear* $s(\cdot)$ leva vetores $\mathbf{x} \in R_n$ em vetores $s(\mathbf{x}) \in R_n$ com $s(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \cdot s(\mathbf{x}) + \beta \cdot s(\mathbf{y})$. Definindo $\{S_{ij,g}; i = 1, 2, \dots, n\}$ como as componentes do vetor $s(\mathbf{g}_j)$ na base \mathbf{g} , é trivial verificar que o vetor $s(\mathbf{x})$, representado na base \mathbf{g} pela n -upla $\mathbf{s}_{(g)}(\mathbf{x}) \equiv (s_{1,g}(\mathbf{x}); s_{2,g}(\mathbf{x}); \dots; s_{n,g}(\mathbf{x}))$, pode ser expresso na forma

$$\mathbf{s}_{(g)}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_{(g)} \cdot \mathbf{X}_{(g)} \quad \text{com} \quad \mathbf{S}_{(g)} = \left[S_{ij,g} \right]_{(n \times n)}. \quad (3.14d)$$

²⁶ O *produto interno* generaliza o conceito de *produto escalar* de vetores da Geometria Analítica.

Obviamente as n-uplas $\mathbf{X}_{(g)}$ e $\mathbf{L}_{(g)}$, embora representem entidades distintas, são indistinguíveis enquanto n-uplas podendo ser, inclusive, numericamente iguais; o mesmo ocorre para as matrizes $\mathbf{M}_{(g)}$ e $\mathbf{S}_{(g)}$. A distinção entre esses conjuntos de n-uplas (ou de matrizes) ocorre quando se considera a *mudança de base*: como veremos a seguir, as leis de transformação de $\{\mathbf{X}_{(g)}; \mathbf{L}_{(g)}\}$ ou de $\{\mathbf{M}_{(g)}; \mathbf{S}_{(g)}\}$ são distintas em geral pois, dependendo o que uma dada n-upla (ou matriz) representa, uma certa propriedade muito bem estabelecida deve permanecer *invariante* nessa mudança de base e a lei de transformação é definida por essa *invariância*.

Seja assim $\mathbf{h} \equiv \{\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2; \dots; \mathbf{h}_n\}^t$ uma outra base de \mathbb{R}_n ; escrevendo cada vetor da base \mathbf{h} em termos dos vetores da base \mathbf{g} temos

$$\mathbf{h}_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} \mathbf{g}_j, \quad (3.15a)$$

e introduzindo a matriz $\mathbf{T} = [T_{ij}]$ essa relação entre os vetores das bases pode ser reescrita na forma compacta

$$\mathbf{h} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{g}. \quad (3.15b)$$

A matriz \mathbf{T} é, por construção, não-singular ($\det \mathbf{T} \neq 0$), visto que os vetores $\mathbf{h} \equiv \{\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2; \dots; \mathbf{h}_n\}^t$ são linearmente independentes (as linhas de $[T_{ij}]$ são LI), e $\det \mathbf{T}$ é o *Jacobiano* da transformação $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{h}$.

Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$ pode ser definido por suas coordenadas $\mathbf{X}_{(g)} \equiv (x_{1,g}; x_{2,g}; \dots; x_{n,g})^t$ em relação à base \mathbf{g} ou $\mathbf{X}_{(h)} \equiv (x_{1,h}; x_{2,h}; \dots; x_{n,h})^t$ em relação à base \mathbf{h} , a invariância de \mathbf{x} sendo preservada pela relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_{(h)}^t \cdot \mathbf{h} = \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{g},$$

de onde segue, utilizando (3.15b), $\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{X}_{(h)} = \mathbf{X}_{(g)}$ ou

$$\mathbf{X}_{(h)} = (\mathbf{T}^t)^{-1} \cdot \mathbf{X}_{(g)}. \quad (3.16a)$$

De outro lado, a *forma linear* $l(\mathbf{x})$ é representada na base \mathbf{g} pela n-upla $\mathbf{L}_{(g)} \equiv (l(\mathbf{g}_1); l(\mathbf{g}_2); \dots; l(\mathbf{g}_n))^t$ e na base \mathbf{h} pela n-upla $\mathbf{L}_{(h)} \equiv (l(\mathbf{h}_1); l(\mathbf{h}_2); \dots; l(\mathbf{h}_n))^t$; o princípio de invariância exige agora

$$l(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_{(h)}^t \cdot \mathbf{X}_{(h)} = \mathbf{L}_{(g)}^t \cdot \mathbf{X}_{(g)}$$

e portanto, com o auxílio de (3.16a),

$$\mathbf{L}_{(h)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}_{(g)}. \quad (3.16b)$$

A n-upla \mathbf{L} que representa a *forma linear* é denominada de “*vetor covariante*” pois se transforma de acordo com a modificação sofrida pela base – ver (3.15b) e (3.16b) – ao passo que a n-upla \mathbf{X} é denominada de “*vetor contravariante*” pois obedece uma lei de transformação “*contrária*” à obedecida pela base, ver (3.16a).

De forma genérica, as n-uplas são as representações, em relação a uma certa base, de “*tensores de primeira ordem*”, as matrizes de “*tensores de segunda ordem*”, as matrizes tri-dimensionais $[P_{ijk}]$ de “*tensores de terceira ordem*” e assim por diante. A lei de transformação, estipulando a invariância obedecida pelo tensor, é definida pela presença das matrizes \mathbf{T} ou \mathbf{T}^{-1} : dizemos assim que \mathbf{L} é um “*tensor de primeira ordem covariante*” e \mathbf{X} é um “*tensor de primeira ordem contravariante*”.

As matrizes $\mathbf{M}_{(g)}$ e $\mathbf{S}_{(g)}$ representam “*tensores de segunda ordem*” em relação à base \mathbf{g} : o primeiro representa uma *forma bilinear* e o segundo um *operador linear*. Como veremos a seguir, as leis de transformação são também distintas nesses dois casos. De fato, na transformação de coordenada da *forma bilinear* exige-se a invariância do produto escalar ou,

$$\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle = \mathbf{X}_{(h)}^t \cdot \mathbf{M}_{(h)} \cdot \mathbf{Y}_{(h)} = \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{M}_{(g)} \cdot \mathbf{Y}_{(g)},$$

e portanto, como $\mathbf{X}_{(g)} = \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{X}_{(h)}$, tem-se

$$\mathbf{M}_{(h)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{(g)} \cdot \mathbf{T}^t. \quad (3.17a)$$

A *forma bilinear*, que representa no caso o produto interno, é assim um “*tensor de segunda ordem duas vezes covariante*”. No caso em questão $\mathbf{M}_{(g)}$ é uma matriz *simétrica positiva definida*, uma propriedade obviamente preservada na matriz $\mathbf{M}_{(h)}$ pela transformação (3.17a).

De outro lado, a lei de transformação do *operador linear* $s(\mathbf{x})$ é definida pela regra de invariância

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_{(h)}^t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{s}_{(g)}^t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{X}_{(h)}^t \cdot \mathbf{S}_{(h)}^t \cdot \mathbf{h} = \mathbf{X}_{(g)}^t \cdot \mathbf{S}_{(g)}^t \cdot \mathbf{g}$$

e utilizando outra vez (3.15b) e (3.16a) obtemos

$$\mathbf{S}_{(h)} = (\mathbf{T}^{-1})^t \cdot \mathbf{S}_{(g)} \cdot \mathbf{T}^t, \quad (3.17b)$$

isso é: o *operador linear* é representado por um “*tensor de segunda ordem uma vez contravariante e uma vez covariante*”.

Finalmente, concluindo essa breve introdução aos tensores, observamos que o *produto escalar* de duas n-uplas \mathbf{P} e \mathbf{Q} , definido pela regra

$$\mathbf{P}^t \cdot \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n P_i Q_i, \quad (3.18a)$$

representa diferentes entidades dependendo da natureza tensorial dessas n-uplas. De fato, supondo que essas n-uplas representem (a) dois vetores covariantes, (b) dois vetores contravariantes, (c) um vetor covariante e outro contravariante, tem-se

$$\mathbf{P}_{(g)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} = \begin{cases} \text{a) (cov; cov): } \mathbf{P}_{(g)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} = \mathbf{P}_{(h)}^t \cdot \mathbf{G}^{(cc)} \cdot \mathbf{Q}_{(h)} \text{ com } \mathbf{G}^{(cc)} = (\mathbf{T}^{-1})^t \cdot \mathbf{T}^{-1}; \\ \text{b) (cont; cont): } \mathbf{P}_{(g)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} = \mathbf{P}_{(h)}^t \cdot \mathbf{G}_{(cc)} \cdot \mathbf{Q}_{(h)} \text{ com } \mathbf{G}_{(cc)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^t; \\ \text{c) (cov; cont): } \mathbf{P}_{(g)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} = \mathbf{P}_{(h)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(h)}, \end{cases} \quad (3.18b)$$

onde $\mathbf{G}^{(cc)}$ é um tensor de segunda ordem duas vezes contravariante representado pela matriz identidade \mathbf{I} na base \mathbf{g} e $\mathbf{G}_{(cc)}$ é um tensor de segunda ordem duas vezes covariante representado também pela matriz identidade \mathbf{I} na base \mathbf{g} . Somente no caso (c), onde um vetor é contravariante e outro covariante, a estrutura do produto escalar das n-uplas é mantida: nesse caso podemos identificar a n-upla $\mathbf{P}_{(g)}$ com as componentes de uma *forma linear* definida em \mathbb{R}_n .

É conveniente, nesse ponto, que se introduza uma *notação* que permita identificar, de imediato, o caráter do tensor. Estipula-se assim que um *super-índice* indique *contravariância* e um *sub-índice* *covariância*; portanto

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{g}_i = x^i \mathbf{g}_i; \\ \circ l(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n l_i x^i = l_i x^i; \\ \circ \langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} x^i y^j = M_{ij} x^i y^j; \\ \circ s(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n s^i(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_j^i x^j \mathbf{g}_i = S_j^i x^j \mathbf{g}_i, \end{aligned} \quad (3.19a)$$

com (3.19a) apresentando à direita a convenção de soma de Einstein: índices covariantes e contravariantes repetidos implicam em soma de 1 a n. De maneira análoga, as expressões definidas em (3.18b) podem ser escritas na forma

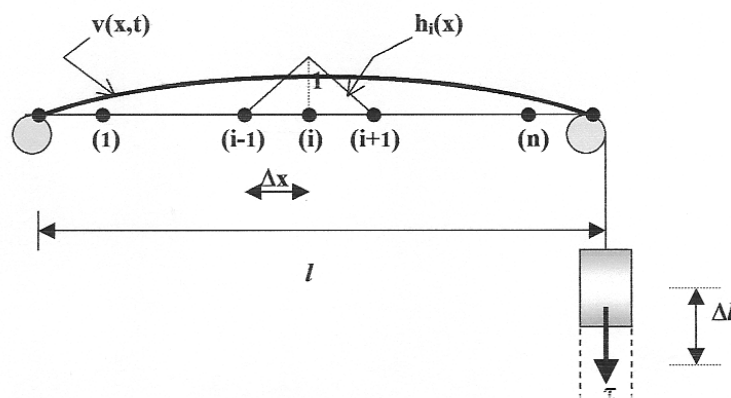
$$\begin{aligned}
 \text{a) } \mathbf{P}_{(g)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} &= G^{ij} P_i Q_j \quad (\mathbf{G}^{(cc)} = [G^{ij}]); \\
 \text{b) } \mathbf{P}_{(g)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} &= G_{ij} P^i Q^j \quad (\mathbf{G}_{(cc)} = [G_{ij}]); \\
 \text{c) } \mathbf{P}_{(g)}^t \cdot \mathbf{Q}_{(g)} &= P_i Q^i.
 \end{aligned}
 \tag{3.19b}$$

Em geral, portanto, n-uplas, matrizes, matrizes tri-dimensionais etc. representam entidades distintas, cujas propriedades se explicitam nas *regras de invariância* obedecidas na mudança de sistemas coordenados. De outro lado, como qualquer transformação não-linear de coordenadas pode ser, se o Jacobiano $\det \mathbf{T}$ for não nulo, localmente linearizada e invertida, as idéias aqui lançadas se aplicam (localmente) e constituem, em larga medida, o objeto de estudo do *cálculo tensorial*, tratado em textos especializados. Alguns aspectos deste cálculo foram explorados no corpo principal deste capítulo.

* * *

3.5: EXERCÍCIOS

(3.1): (*Dinâmica da Corda: Sistema Discreto e Equações de Lagrange*) Seja a corda inextensível de comprimento l , densidade de massa linear ρ e sob tensão τ , como indicado na figura, e $v(x,t)$ o deslocamento lateral da corda. Pede-se:



a) Sendo $\theta(x,t)$ o ângulo que a tangente à corda faz com o eixo x – isso é, $\tan \theta = \partial v / \partial x$ – e supondo $\theta(x,t) \ll 1$, mostrar que para uma corda inextensível

$$\begin{aligned} \circ \theta(x,t) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) + \mathcal{O}(\theta^3); \\ \circ \Delta l &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \mathcal{O}(\theta^4), \end{aligned}$$

onde Δl é o deslocamento vertical da força de tração τ ;

b) Mostrar que a energia cinética e a energia de restauração devida à tração na corda são dadas por

$$\begin{aligned} \circ \mathcal{T}[v(x,t)] &= \frac{1}{2} \rho \cdot \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx; \\ \circ \mathcal{U}_\tau[v(x,t)] &= \tau \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \tau \cdot \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Seja $f(x,t)$ um campo de força transversal aplicado à corda. Mostrar que o potencial total é dado por

$$\begin{aligned} \circ \mathcal{U}[v(x,t)] &= \mathcal{U}_\tau[v(x,t)] - \mathcal{U}_f[v(x,t)]; \\ \circ \mathcal{U}_f[v(x,t)] &= \int_0^l f(x,t) \cdot v(x,t) dx; \end{aligned}$$

c) Sejam $\{x_i = i \cdot \Delta x; i = 1, 2, \dots, n\}$ pontos (nós) equi-espaciaados no segmento $0 \leq x \leq l$, com $(n+1) \cdot \Delta x = l$ e $\{h_i(x); i = 1, 2, \dots, n\}$ funções lineares entre os nós, contínuas e tais que $h_i(x_j) = \delta_{ij}$, como indicado na figura. Aproximando os campos de deslocamento $v(x,t)$ e de força $f(x,t)$ pelas “*interpoladas nodais*” $\{v_i(x,t); f_i(x,t)\}$

$$\begin{aligned} \circ v_I(x,t) &= \sum_{i=1}^n V_i(t) \cdot h_i(x) \quad \text{com} \quad V_i(t) = v(x_i,t); \\ \circ f_I(x,t) &= \sum_{i=1}^n F_i(t) \cdot h_i(x) \quad \text{com} \quad F_i(t) = f(x_i,t), \end{aligned}$$

mostrar que $\left(\mathbf{V}(t) = \{V_i(t)\}_{(n;1)} ; \mathbf{F}(t) = \{F_i(t)\}_{(n;1)} \right)$

- $\mathcal{T}[\dot{\mathbf{V}}(t)] = \frac{1}{2} \rho \Delta x \dot{\mathbf{V}}^t(t) \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{V}}(t);$
- $\mathcal{U}_\tau[\mathbf{V}(t)] = \frac{1}{2} \frac{\tau}{\Delta x} \mathbf{V}^t(t) \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}(t);$
- $\mathcal{U}_f[\mathbf{V}(t)] = \Delta x \mathbf{V}^t(t) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}(t),$

com

- $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{ij}]$ com $M_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^l h_i(x) \cdot h_j(x) dx;$
- $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{ij}]$ com $K_{ij} = \Delta x \int_0^l \frac{dh_i}{dx}(x) \cdot \frac{dh_j}{dx}(x) dx;$

d) Verificar que as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} são matrizes $(n \times n)$ da forma

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{(n,n)} \quad ; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{(n,n)}$$

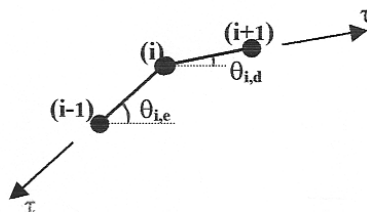
e) A Lagrangeana do sistema discreto é dada pela expressão

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}}) = \mathcal{T}(\dot{\mathbf{V}}) - \mathcal{U}(\mathbf{V}).$$

Utilizar as *Equações de Lagrange* para obter as equações do movimento da corda discretizada na forma matricial

$$\rho \Delta x \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \frac{\tau}{\Delta x} \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \Delta x \mathbf{M} \cdot \mathbf{F};$$

f) Interpretar a i -ésima equação a partir do equilíbrio de forças Newtoniano



Nota: Utilizar a igualdade $\frac{1}{6}[y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}] = y_i + \frac{1}{6}y_i'' \cdot \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^4)$ obtida pela expansão em *série de Taylor* da função $y(x)$ em um entorno Δx do nó x_i .

* * *

(3.2): (Equação da Corda no Continuum) Utilizando as equações discretas do exercício (3.1) e levando ao limite $\Delta x \rightarrow 0$, mostrar que $v(x,t)$ satisfaz a equação dinâmica e condições de contorno

$$\left(y_i'' = \frac{1}{\Delta x^2} [y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}] + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) \Rightarrow \begin{cases} \circ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t); \\ \circ v(0, t) = v(l, t) = 0. \end{cases}$$

* * *

(3.3): (Trabalhos Virtuais – Formulação Fraca) Sendo $\Delta v(x)$ uma função arbitrária (“suficientemente lisa”) a seguinte relação pode ser estabelecida (ver (3.3a))

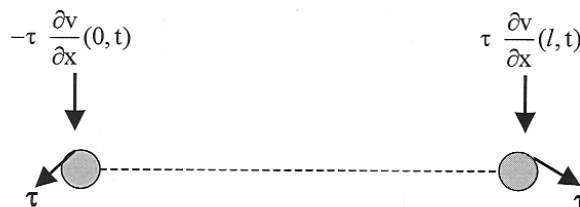
$$\left(\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - f(x, t) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\int_0^l \left[\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - f(x, t) \right] \cdot \Delta v dx = 0 \text{ todo } \Delta v(x) \right).$$

a) Utilizando a identidade (ver (2.20a)),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \Delta v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta v \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta v}{\partial x},$$

mostrar que a expressão à direita pode ser escrita na forma

$$\rho \int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cdot \Delta v \, dx + \tau \int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \, dx = \int_0^l f \cdot \Delta v \, dx + \left[\tau \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) \cdot \Delta v(l) - \tau \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) \cdot \Delta v(0) \right].$$



Utilizar o esquema de forças indicado para interpretar o termo entre colchetes;

b) Um *deslocamento virtual* $\delta v(x)$ é a diferença entre dois deslocamentos possíveis, isso é, permitidos pelos vínculos. Definir a condição satisfeita por um *deslocamento virtual* e mostrar então que

$$\rho \int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cdot \delta v \, dx + \tau \int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta v}{\partial x} \, dx = \int_0^l f \cdot \delta v \, dx,$$

para “todo” *deslocamento virtual* $\delta v(x)$;

Nota: A equação acima é denominada a “*equação da corda na forma fraca*” ou simplesmente a “*equação fraca*”;

c) Utilizando as interpoladas nodais $\{v_1(x,t); f_1(x,t)\}$, definidas no exercício (2.21), e também a *interpolada nodal* $\delta v_1(x)$ de $\delta v(x)$, mostrar que a “*forma fraca*” da equação da corda reduz-se à forma discreta,

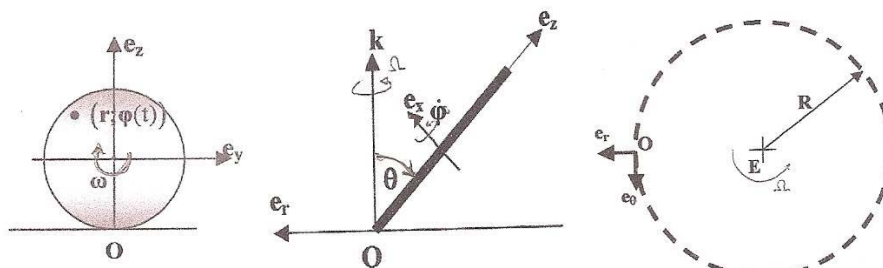
$$\delta \mathbf{V}^t \cdot \left\{ \rho \Delta x \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \frac{\tau}{\Delta x} \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \right\} = \delta \mathbf{V}^t \cdot \{ \Delta x \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} \} \quad \text{para todo } \delta \mathbf{V} \in \mathbf{R}_n,$$

com as matrizes $\{\mathbf{M}, \mathbf{K}\}$ e o vetor $\mathbf{F}(t)$ definidos no item (e) do exercício (3.1). Qual é a equação satisfeita por $\mathbf{V}(t)$?

d) Utilizar o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* para identificar fisicamente os termos da “*equação fraca*” da corda definida no item (b).

* * *

(3.4): (Coordenadas generalizadas) Seja uma roda deslocando-se com velocidade ΩR em um círculo de raio R , como indicado na figura. A roda de raio r_0 gira sem escorregar com velocidade angular ω em torno de seu eixo e pretende-se determinar o “ângulo de cambagem” θ indicado na figura.



$$(\varphi(t) = \varphi_0 - \omega t; \quad \dot{\varphi} = -\omega)$$

Pede-se:

a) Seja $P \equiv (r; \varphi(t))$ um ponto na roda. Mostrar que o vetor posição \mathbf{x}_p e sua velocidade \mathbf{v}_p são dados por

$$\begin{aligned} \circ \mathbf{x}_p &= \left[R - (r_0 + r \sin \varphi(t)) \sin \theta \right] \mathbf{e}_r + (r \cos \varphi(t)) \mathbf{e}_\theta + (r_0 + r \sin \varphi(t)) \cos \theta \mathbf{k}; \\ \circ \mathbf{v}_p &= -(\dot{\varphi} \sin \theta + \Omega) r \cos \varphi(t) \mathbf{e}_r + \left(\Omega (R - r_0 \sin \theta) - (\Omega \sin \theta + \dot{\varphi}) r \sin \varphi(t) \right) \mathbf{e}_\theta + \\ &\quad + (\dot{\varphi} \cos \theta) r \cos \varphi(t) \mathbf{k}; \end{aligned}$$

b) Utilizar a condição cinemática de não-escorregamento para mostrar que $\Omega R = \omega r_0$. O ponto (O) de contacto com o solo tem coordenadas $(r = r_0; \varphi(t) = 3\pi/2)$. Verificar que $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$;

c) Como $\varphi(t) = \varphi_0 - \omega t$ e $\{\Omega; \omega; R; r_0\}$ são conhecidos, a posição de qualquer ponto P na roda estará determinada se o “ângulo de cabagem” θ for conhecido. O ângulo θ é assim a *coordenada generalizada* do problema. Mostrar que o deslocamento virtual no ponto P é dado por

$$\delta \mathbf{x}_p = -\delta \theta \cdot (r_0 + r \sin \varphi(t)) \left[\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{k} \right].$$

Qual é o valor de $\delta \mathbf{x}_o$? Interprete este resultado sob a luz do *Princípio dos Trabalhos Virtuais*;

d) Observando as identidades

$$\rho \int_s r^2 \cos^2 \varphi(t) dS = \rho \int_s r^2 \sin^2 \varphi(t) dS = \frac{1}{2} J_c = \frac{m r_0^2}{4}; \quad \rho \int_s dS = m,$$

mostrar que a *energia cinética* é dada pela expressão

$$\mathcal{T}(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ m \Omega^2 (R - r \sin \theta)^2 + \frac{m r^2}{4} \left[(\dot{\varphi} \sin \theta + \Omega)^2 + (\Omega \sin \theta + \dot{\varphi})^2 + (\dot{\varphi} \cos \theta)^2 \right] \right\};$$

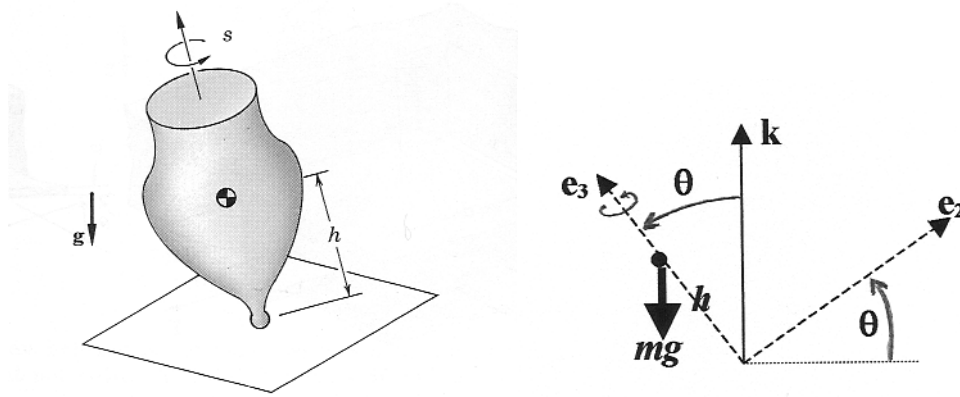
e) Mostrar que $\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{T}(\theta) - m g r_0 \cos \theta$ e aplicando as *Equações de Lagrange* obter

$$\tan \theta = \frac{3(\omega r)^2}{2gR} \left(1 - \frac{5}{6} \frac{r}{R} \sin \theta \right).$$

(Prova de PEM 2200-2007)

* * *

4. APLICAÇÕES



$$\mathbf{N}_o = (h \mathbf{e}_3) \wedge (-mg \mathbf{k}) = (-mgh \mathbf{e}_3) \wedge (\cos \theta \mathbf{e}_3 + \sin \theta \mathbf{e}_2) = mgh \cdot \sin \theta \mathbf{e}_1$$

$$\frac{D\mathbf{L}_o}{Dt} = \mathbf{N}_o \Rightarrow \begin{cases} \circ J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_2 = mgh \cdot \sin \theta(t); \\ \circ J_1 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = 0; \\ \circ J_3 \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{cte.} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por ω_1 a segunda por ω_2 e somando obtemos

$$J_1 (\dot{\omega}_1 \omega_1 + \dot{\omega}_2 \omega_2) = (mgh \cdot \sin \theta(t)) \cdot \omega_1.$$

De outro lado, a energia total do pião é dada por

$$E = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_1 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) + mgh \cdot \cos \theta(t)$$

e, na ausência de forças dissipativas, tem-se

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow J_1 (\dot{\omega}_1 \omega_1 + \dot{\omega}_2 \omega_2) = (mgh \cdot \sin \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \omega_1(t)$$

Definindo

$$\Omega = \left(\frac{J_1 - J_3}{J_1} \right) \cdot \omega_3;$$

$$\lambda = \frac{mgh}{J_1 \Omega^2},$$

- $\ddot{\omega}_1(t) + \Omega^2 (1 - \lambda \cdot \cos \theta(t)) \cdot \omega_1(t) = 0;$
- $\dot{\theta}(t) = \omega_1(t).$

