



MECÂNICA II – PME 3200

EXERCÍCIO DE MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA - EMSC #1

1. Introdução

Considere um sistema massa/mola/amortecedor com um grau de liberdade de deslocamento horizontal  $x$ , sobre roletes sem atrito e um forçamento externo  $F(t)$ , conforme mostrado na Figura 1.

Obtenha a equação diferencial que descreve o movimento deste sistema com as seguintes características ( $m$ ,  $k$  e  $c$ ):

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t, m, k, c, F(t)) \quad (1)$$

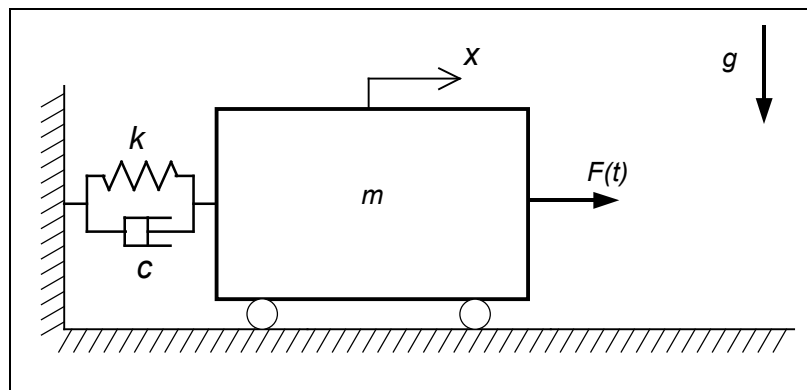


Figura 1 – Sistema massa/mola/amortecedor com 1 grau de liberdade

A simulação temporal dos movimentos da massa pode ser realizada por um processo de integração numérica.



## Implementação Numérica

Para a implementação numérica da integração da equação diferencial de segunda ordem são necessárias duas etapas de integração. Por conveniência pode-se expressar o sistema na forma de espaço de estados, reduzindo a ordem do sistemas.

Seja o vetor de estados  $\{y\}$  descrito como:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y(1) \\ y(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad \text{derivando} \Rightarrow \quad \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}(1) \\ \dot{y}(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

A solução de um sistema de equações diferenciais pode ser realizado por uma única integração numérica. Utilizando seu programa numéricos preferido (*Python, Scilab, Octave, Mathematica, MatLab*), escreva códigos para integrar a equação diferencial obtida ao longo de instantes de tempo  $dt$ , para condições iniciais definidas:  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$  do sistema homogêneo para  $t = t(0)$ .

## Simulação do Comportamento Dinâmico

Realize os seguintes estudos, considerando as seguintes características do sistema (ver Figura 1):

Massa  $m = 10$  kg; rigidez da mola  $k = 3553.0$  N/m; constante do amortecedor viscoso  $c = 37.7$  Ns/m; gravidade  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>; considere que a cota  $x$  é medida a partir da posição da massa tal que a mola esteja na sua posição sem carga.

**Caso A** - Simule o movimento por  $t_f = 3$  segundos, com as seguintes condições iniciais:  $x(0) = 0.10$ ;  $\dot{x}(0) = 0.0$  e  $F(t) = 0.0$ .

**Caso B** - Simule o movimento por  $t_f = 3$  segundos, com as seguintes condições iniciais:  $x(0) = 0.0$ ;  $\dot{x}(0) = 1.0$  e  $F(t) = 0.0$

**Caso C** – Utilizando  $c = 377$ ; simule o movimento por  $t_f = 3$  segundos, com as seguintes condições iniciais:  $x(0) = 0.10$ ;  $\dot{x}(0) = 1.0$  e  $F(t) = 0.0$ .

**Caso D** – Utilizando  $c = 37.7$ ; simule o movimento por  $t_f = 5$  segundos, com as seguintes condições iniciais:  $x(0) = 0.0$ ;  $\dot{x}(0) = 0.0$  e  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t + \theta)$  para  $F_0 = 1000$ ;  $\omega = \pi$  rad/s e  $\theta = \pi/2$ .

**Caso E** – Utilizando  $c = 37.7$ ; simule o movimento por  $t_f = 3$  segundos, com as seguintes condições iniciais:  $x(0) = 0.0$ ;  $\dot{x}(0) = 0.0$  e uma força  $F(t) = 1000$ , constante, e aplicada a partir de  $t = 0.5$  segundos.



## Análise dos Resultados

Para analisar os resultados crie gráficos de:

- $x(t) \times t$
- $\dot{x}(t) \times t$ ;
- $x(t) \times \dot{x}(t)$  e
- $F(t) \times t$ .

Pesquise sobre vibrações na *internet*. Determine analiticamente a frequência natural não amortecida do sistema. Compare o valor calculado com o resultado obtido na simulação. Observando os resultados gráficos, descreva os movimentos em cada caso, interpretando e comentando as alterações de comportamento identificadas. Analise os resultados obtidos. Elabore um relatório descrevendo todos os resultados e conclusões obtidas.

## Referencias Bibliográficas

Tutorial Programa PYTHON, site de Mecânica II da POLI. <http://sites.poli.usp.br/d/pme3200/>

França, L. N. F. Matsumura, A. Z. (2011) Mecânica Geral. Editora Edgard Blücher, 3ª edição, ISBN: 9788521205784, p. 316.

Manual do Python – Python é um programa aberto (*open-source*) e livre para uso sendo distribuído pela Python Software Foundation. <https://www.python.org/doc/>

Manual do Scilab - Scilab é um programa aberto (*open-source*) e livre para uso sendo distribuído pela INRIA (até 2003) e atualmente pela SCILAB Enterprises. <https://www.scilab.org/tutorials>

Manual do Octave – <https://www.gnu.org/software/octave/>

Manual do Matlab - <https://www.mathworks.com/help/matlab/>

Manual do Mathematica - <http://www.wolfram.com/mathematica/>