



## PME 3200 – Mecânica II

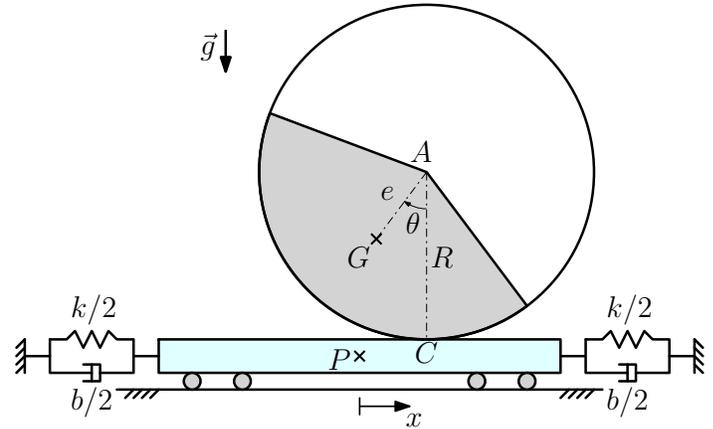
## Exercício de Modelagem e Simulação Computacional 2019

## Parte 3/3

A figura ao lado mostra uma representação *fora de escala* de um sistema mecânico constituído por um corpo rígido cilíndrico que pode *rolar sem escorregar* sobre uma placa plana rígida<sup>1</sup>.

O corpo rígido cilíndrico é constituído por um setor recortado de um disco homogêneo, de centro  $A$  e raio  $R$ , encaixado no interior de um anel homogêneo de raio  $R$  e de espessura e inércia desprezíveis. Este corpo tem massa  $m$  e seu centro de massa  $G$  está a uma distância  $e$  do ponto  $A$ . O ângulo  $\theta$  mede a inclinação do segmento  $GA$  com respeito à vertical.

A placa plana tem massa  $M$  e pode realizar uma translação, sem atrito, sobre um plano horizontal fixo, descrita pela coordenada generalizada  $x$ . Considere ainda que a placa esteja ligada à base fixa por meio de duas molas lineares idênticas de constante  $k/2$ , e dois amortecedores lineares idênticos de constante  $b/2$ , conforme ilustrado na figura. A posição da placa em que as molas estão relaxadas é  $x = 0$ .



**3.1** Escreva as expressões da energia cinética  $T$ , energia potencial  $V$  e da função de dissipação de Rayleigh  $R$  para o sistema.

**3.2** Obtenha as equações de Lagrange para o sistema nas coordenadas generalizadas  $x$  e  $\theta$ .

**3.3** Linearize as equações de movimento em torno da configuração de equilíbrio estável do sistema, expressando-as na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_{xx} & m_{x\theta} \\ m_{\theta x} & m_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{x\theta} \\ b_{\theta x} & b_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{x\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Note que, definindo  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ , a Eq. (1) pode ser reescrita, em notação compacta, na forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Assim como na Parte 2 do EMSC 2019, assuma que a placa seja suficiente extensa para que, ao rolar sobre a mesma, o corpo rígido cilíndrico se mantenha a uma distância  $\gg R$  de suas extremidades. Além disso, considere que a placa plana é imantada e homogênea e que se prende ao centro  $A$  do corpo cilíndrico um pequeno objeto de aço de massa e dimensões desprezíveis, produzindo uma força de atração (aproximadamente) vertical  $F_M$  entre os corpos, suficiente para garantir que *não haverá perda de contato ou escorregamento* entre as superfícies dos corpos.



**3.4** Verifique que, caso os efeitos dissipativos sejam desconsiderados, a equação linearizada de movimento para a análise de pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio estável do sistema se reduz à forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

As *frequências naturais* de pequenas oscilações não-amortecidas deste sistema podem ser definidas como os valores de  $\omega$  para os quais a Eq. (3) apresenta soluções da forma  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} A_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ A_\theta \sin(\omega t + \phi_\theta) \end{bmatrix}$ , ou seja, com as coordenadas generalizadas  $x$  e  $\theta$  oscilando na *mesma frequência*. Note que, neste caso,  $\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q}$  e, portanto:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4)$$

A existência de uma solução não-trivial  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$  para este problema requer que a matriz  $(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)$  seja singular, ou seja:

$$\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2) = 0 \quad (5)$$

Obtenha, a partir da Eq. (5), o polinômio característico correspondente e, a partir da determinação das raízes do mesmo, encontre as frequências naturais de pequenas oscilações não-amortecidas do sistema modelado.

**3.5** Defina o vetor de estados  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$  e expresse a equação diferencial ordinária não-linear obtida no item 3.2 na forma de espaço de estados  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ .

**3.6** Implemente uma rotina no ambiente computacional Scilab para a integração numérica do sistema de equações não-lineares de movimento em forma de espaço de estados, utilizando a função `ode`, e para o cálculo das frequências naturais de pequenas oscilações não-amortecidas do sistema, a partir das relações obtidas no item 3.4.

**3.7** Adote o seguinte conjunto de parâmetros para o problema:  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $R = 0.30 \text{ m}$ ,  $e = 0.20 R$ ,  $m = 1.0 \text{ kg}$ ,  $M = 10 m$ ,  $k = \kappa M \sqrt{\frac{2eg}{R(3R - 4e)}}$  e  $b = 2\zeta \sqrt{kM}$ .

Utilize a rotina implementada para simular os seguintes cenários, partindo das condições iniciais  $\theta(0) = 0 \text{ rad}$  e  $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$ ,  $x(0) = 2R$  e  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ :

Cenário	$\kappa$	$\zeta$	Tempo de simulação [s]
3.1	0.50	0.05	1000
3.2	1.00	0.05	500
3.3	2.00	0.05	100
3.4	2.50	0.05	200
3.5	2.50	0.25	50
3.6	2.50	1.00	150



Para cada cenário represente os resultados das simulações na forma dos seguintes gráficos:

- a) série temporal de  $x$  ( $x$  em função do tempo);
  - b) série temporal de  $\theta$  ( $\theta$  em função do tempo);
  - c)  $\dot{x}$  em função de  $x$ ;
  - d)  $\dot{\theta}$  em função de  $\theta$ ;
  - e)  $\dot{\theta}$  em função de  $\dot{x}$ .
- 3.8** Interprete fisicamente os resultados obtidos, observando os valores das frequências naturais de pequenas oscilações não-amortecidas do sistema em cada cenário.
- 3.9** Explore seu modelo variando parâmetros e condições iniciais, propondo novos cenários de simulação além dos sugeridos.