PME 3200 – Mecânica II
Exercício de Modelagem e Simulação Computacional 2019

Parte 2/3

A Fig. 1 mostra uma representação fora de escala de um sistema mecânico constituído pelo corpo rígido cilíndrico $\mathcal{E}$, que mantém as mesmas propriedades inerciais e geométricas descritas na primeira parte do EMSC, e pode rolar sem escorregar sobre uma placa plana rígida $\mathcal{P}$ de comprimento $L \gg R$. Considere que a placa seja suficiente extensa para que, ao rolar sobre a mesma, o corpo rígido $\mathcal{E}$ se mantenha a uma distância $\gg R$ de suas extremidades. Além disso, a placa plana $\mathcal{P}$ é imantada e homogênea e prende-se ao centro A do corpo cilíndrico $\mathcal{E}$ um pequeno objeto de aço de massa e dimensões desprezíveis, produzindo uma força de atração (aproximadamente) vertical F_{M} entre os corpos, suficiente para garantir que *não haverá perda de contato ou escorregamento* entre as superfícies dos corpos.

Considere que a placa plana $\mathcal{P}$ descreva, com respeito a um referencial inercial, um ato de translação puro com velocidade $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath}$, em atitude horizontal, com $\dot{x}(t) = A_{\mathrm{x}}\omega_{\mathrm{x}}\sin(\omega_{\mathrm{x}}t + \phi_{\mathrm{x}})$ e $\dot{y}(t) = A_{\mathrm{y}}\omega_{\mathrm{y}}\sin(\omega_{\mathrm{y}}t + \phi_{\mathrm{y}})$.

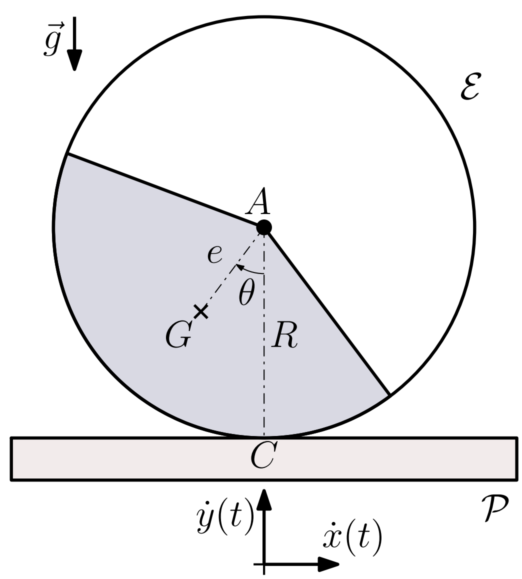

Figura 1: Representação, fora de escala, do sistema constituído por um corpo cilíndrico $\mathcal{E}$ que pode rolar sem escorregar sobre uma placa plana $\mathcal{P}$.

2.1 Esboce os diagramas de corpo livre dos corpos $\mathcal{E}$ e $\mathcal{P}$.

2.2 A partir das relações fornecidas pelo Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, com respeito ao pólo A, e do Teorema da Resultante, componente horizontal, deduza a equação diferencial ordinária não-linear na variável θ (ângulo de inclinação do segmento GA com respeito à vertical) que modela o movimento do corpo cilíndrico $\mathcal{E}$ nas condições descritas.

2.3 Linearize a equação de movimento em torno da configuração de equilíbrio estável e utilizando a equação linearizada, determine a frequência natural ω_{n} do sistema.

2.4 Faça uma breve pesquisa sobre o conceito de *ressonância paramétrica*[1] e compare a equação *linearizada* obtida com a *equação de Mathieu forçada*:

$$\ddot{\theta} + \omega_\mathrm{n}^2\big(1 + \epsilon_\mathrm{y}\cos(\omega_\mathrm{y}t + \phi_\mathrm{y})\big)\theta = -\omega_\mathrm{n}^2\epsilon_\mathrm{x}\cos(\omega_\mathrm{x}t + \phi_\mathrm{x})$$

Mostre que, para este problema:

$$\epsilon_\mathrm{x} = \left(\frac{R}{e} - 1\right)\frac{A_\mathrm{x}\omega_\mathrm{x}^2}{g} \quad \text{e} \quad \epsilon_\mathrm{y} = \frac{A_\mathrm{y}\omega_\mathrm{y}^2}{g}$$

Interprete o papel dos termos em $\cos(\omega_\mathrm{x}t + \phi_\mathrm{x})$ e em $\cos(\omega_\mathrm{y}t + \phi_\mathrm{y})$.

2.5 Expresse a equação diferencial ordinária não-linear obtida no item 2.2 na forma de espaço de estados.

2.6 Implemente uma rotina no ambiente computacional Scilab para a integração numérica da equação não-linear de movimento em forma de espaço de estados, utilizando a função `ode`.

2.7 Adote o seguinte conjunto de parâmetros e condições iniciais para o problema: $g = 9.8$ m/s^2, $R = 0.30$ m, $e = 0.20\,R$, $\theta(0) = \pi/6$ rad e $\dot{\theta}(0) = 0$ rad/s. Utilize a rotina implementada para simular os seguintes cenários até aproximadamente $t = 120$ s:

	$\dot{x}(t)$			$\dot{y}(t)$		
Cenário	A_x	ω_x	ϕ_x	A_y	ω_y	ϕ_y
2.1	$1.25R$	$0.5\,\omega_\mathrm{n}$	0	0		
2.2	$1.25R$	$1.0\,\omega_\mathrm{n}$	0	0		
2.3	$1.25R$	$2.0\,\omega_\mathrm{n}$	0	0		
2.4	0			$1.25R$	$1.0\,\omega_\mathrm{n}$	0
2.5	0			$1.25R$	$2.0\,\omega_\mathrm{n}$	0
2.6	0			$1.25R$	$4.0\,\omega_\mathrm{n}$	0
2.7	$1.25R$	$1.0\,\omega_\mathrm{n}$	0	$1.25R$	$1.0\,\omega_\mathrm{n}$	$\pi/2$
2.8	$1.25R$	$1.0\,\omega_\mathrm{n}$	0	$1.25R$	$2.0\,\omega_\mathrm{n}$	$-\pi/2$
2.9	$1.25R$	$2.0\,\omega_\mathrm{n}$	$-\pi/4$	$1.25R$	$2.0\,\omega_\mathrm{n}$	0

Para cada cenário represente os resultados das simulações na forma de três gráficos:

a) série temporal de θ (θ em função do tempo);

b) série temporal de $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta}$ em função do tempo);

c) trajetórias no espaço de fase ($\dot{\theta}$ em função de θ).

2.8 Inteprete fisicamente os resultados obtidos, identificando, os casos em que ocorre *ressonância (fundamental)* e/ou *ressonância paramétrica*.

2.9 Explore seu modelo variando parâmetros e condições iniciais, propondo novos cenários de simulação além dos sugeridos.

[1] Recomenda-se também que o aluno consulte a Parte B do EMSC #2 do ano de 2007, bem como a discussão sobre o mesmo, apresentada na resolução da P3 de 2007 (material disponível no site da disciplina).