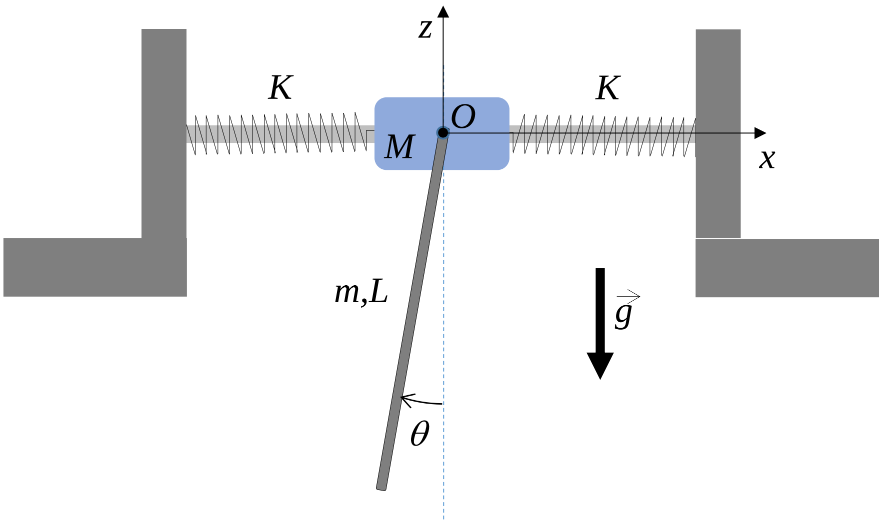
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**PME 3200 – MECÂNICA II – EMSC – 07/06/2017**




O dispositivo da figura é composto por um bloco de massa $M$ e uma barra de massa $m$ e comprimento $L$. O bloco pode deslizar sem atrito ao longo de uma guia horizontal de seção quadrada. O bloco é vazado por um furo de mesma seção quadrada, de forma a envolver a guia perfeitamente, como uma luva. A barra, de distribuição homogênea de massa, está articulada ao bloco em $O$, podendo girar livremente e sem atrito em torno do eixo $Oy$, que é perpendicular ao plano da figura. O bloco está ligado às peças verticais através de duas molas lineares idênticas, de constante $K$. O conjunto está sujeito à ação do campo gravitacional. Pede-se:

(a) Construa os diagramas de corpo-livre do bloco e da barra.
(b) Deduza as equações de movimento do sistema (bloco e barra), nas variáveis $x$ e $\theta$, considerando, para tanto, configuração e estado cinemático genéricos (nos quais o bloco é dotado de aceleração).
(c) Nesta configuração e estado, determine as forças reativas agindo sobre o bloco.
(d) Escreva as equações de movimento em forma matricial. Defina a 'matriz de massa'.
(e) Linearize as equações em torno da situação de equilíbrio trivial, considerando pequenos ângulos de rotação e velocidades angulares. Reescreva as equações em forma matricial, definindo as correspondentes matrizes de massa e de rigidez. Construa o problema de autovalor associado e determine as duas frequências naturais nesta condição de pequenos deslocamentos.
(f) Estude e ambiente-se com o uso dos simuladores já elaborados para o sistema, utilizando a plataforma Scilab. São duas versões: (i) não-linear; (ii) linear.
(g) Teste o simulador, variando as condições iniciais e utilizando os valores dos parâmetros fornecidos abaixo. Analise os resultados.
(h) Simule a dinâmica do sistema e analise os resultados, elaborando gráficos temporais das funções $x(t),\theta(t),\dot{x}(t),\dot{\theta}(t)$, bem como trajetórias nos planos de fase, $\dot{x}(t)\times x(t);\dot{\theta}(t)\times\theta(t)$, etc, para as seguintes condições iniciais:
   i. $x(0)=0;\ \theta(0)=0{,}1;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$
   ii. $x(0)=0;\ \theta(0)=\pi/2;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$.
   iii. $x(0)=0{,}02;\ \theta(0)=0;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$.
   iv. $x(0)=0{,}2;\ \theta(0)=0;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$.
   v. $x(0)=1{,}0;\ \theta(0)=0;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$.
   vi. $x(0)=0;\ \theta(0)=(\pi-0{,}01);\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

vii. $x(0)=0;\ \theta(0)=\pi;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0{,}01$.

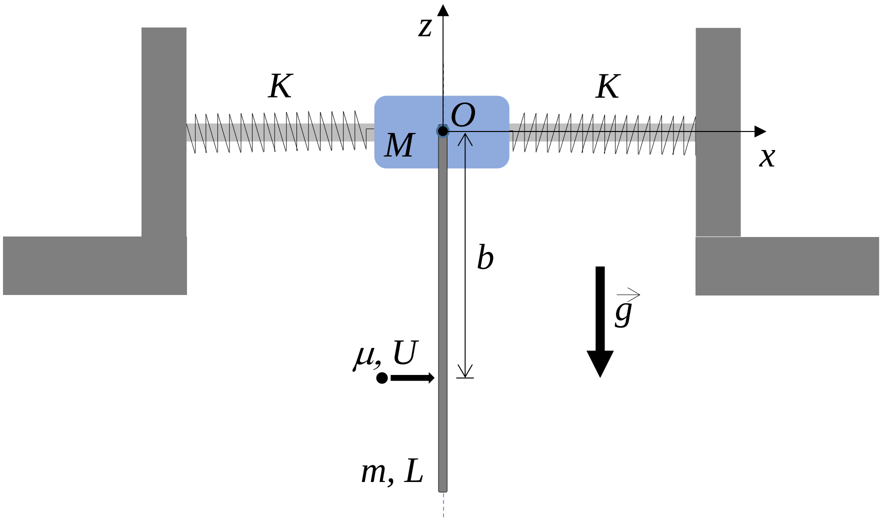
viii. $x(0)=0{,}1;\ \theta(0)=\pi;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$.

ix. $x(0)=-0{,}1;\ \theta(0)=\pi;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$.

***Sugere-se simular o sistema por 50s.***

(i) Repita as simulações acima com $M$=100kg. Interprete os resultados do ponto de vista físico.

(j) Considere agora o sistema em repouso, em duas posições de equilíbrio distintas: (a) trivial ($\theta(0)=0$) (estável) e (b) não-trivial ($\theta(0)=\pi$) (instável). No instante $t$=0, uma partícula de massa $\mu$, choca-se contra a barra, com velocidade $\vec{U}=U\vec{i}$, conforme mostra a figura abaixo para a condição de equilíbrio trivial. Admitindo válidas as hipóteses de choque segundo Newton e conhecido o coeficiente de restituição, $e$, determine o impulso transmitido ao sistema e sua condição cinemática no instante $t=0^+$, imediatamente posterior ao choque, i.e., $v_0=\dot{x}\big|_{t=0^+}, \omega_0=\dot{\theta}\big|_{t=0^+}$. Faça-o para as duas situações de equilíbrio (a) e (b).




(k) Simule e analise a dinâmica do sistema para as seguintes condições:

i. $x(0)=0;\ \theta(0)=0;\ \dot{x}(0)=v_0;\ \dot{\theta}(0)=\omega_0;\ b=L/2$

ii. $x(0)=0;\ \theta(0)=0;\ \dot{x}(0)=v_0;\ \dot{\theta}(0)=\omega_0;\ b=2L/3$

iii. $x(0)=0;\ \theta(0)=\pi;\ \dot{x}(0)=v_0;\ \dot{\theta}(0)=\omega_0;\ b=L/2$

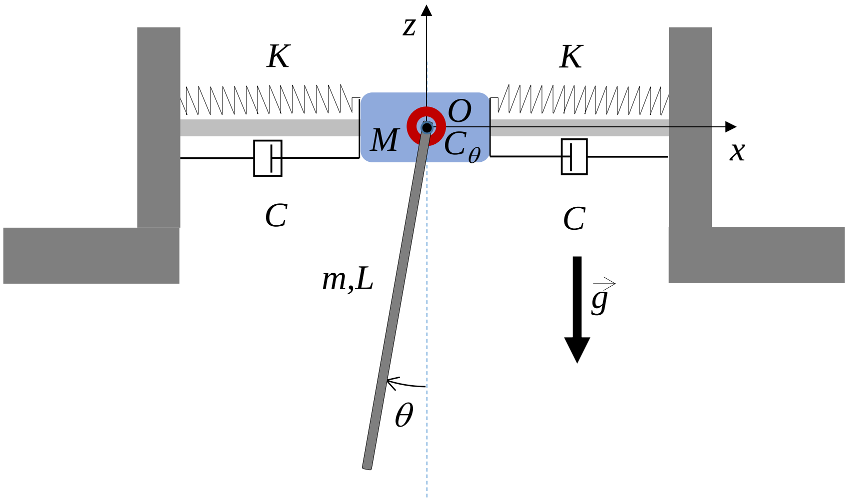
iv. $x(0)=0;\ \theta(0)=\pi;\ \dot{x}(0)=v_0;\ \dot{\theta}(0)=\omega_0;\ b=2L/3$

(l) Repita as simulações do item (k) para $M$=100kg. Interprete os resultados do ponto de vista físico.

*Parâmetros conhecidos:*

$M=1\text{kg},\ m=1\text{kg},\ L=1\text{m},\ K=10\text{N/m},\ \mu=0{,}1\text{kg},\ e=1/2,\ g=10\text{m/s}^2,\ U=1\text{m/s}$.

(m) Ao sistema foram adicionados três amortecedores lineares, como ilustra a figura abaixo. Dois deles são translacionais, de constantes *C*, em paralelo com as molas lineares de constante *K*. O terceiro é um amortecedor rotacional, de constante $C_\theta$. Para este sistema, pede-se deduzir as equações de movimento através do formalismo da Mecânica Analítica.




Para tanto, escreva as funções de energia cinética e potencial do sistema, $T = T(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}),\ V = V(x,\theta)$. Escreva, então, a função Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta})$ e a função de dissipação de Rayleigh $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\dot{x},\dot{\theta})$.

(n) Determine as posições de equilíbrio do sistema, analisando as derivadas parciais da função potencial, $(\partial V/\partial x;\partial V/\partial\theta)$. Na ausência de amortecimento, determine a natureza destes pontos de equilíbrio (ou pontos críticos) quanto à sua estabilidade, inspecionando o determinante da matriz Hessiana de $V = V(x,\theta)$ calculada nestes pontos.

(o) Inspecione agora como se modifica a natureza da estabilidade nestes pontos, com a inclusão dos amortecedores.

(p) Construa as correspondentes funções de energia cinética e potencial, $T_2 = T_2(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}),\ V_2 = V_2(x,\theta)$, próprias ao estudo de pequenas oscilações *em torno da posição de equilíbrio trivial* e rededuza as equações de movimento do sistema. Perceba que a função de Rayleigh já é construída em forma própria a este estudo.

(q) Escreva as equações de movimento na forma matricial usual, onde o subscrito '$_0$' indica tratar-se do entorno do ponto de equilíbrio trivial:

$$\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_0\mathbf{q} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{q} = [x \quad \theta]^t$$

(r) Linearize as equações de movimento obtidas no item (m) em torno da posição de equilíbrio trivial e compare-as com as obtidas nos itens (p) e (q).

(s) Utilizando as rotinas computacionais devidamente modificadas com a inclusão dos termos de amortecimento, simule a dinâmica do sistema para as mesmas condições iniciais do item (h) e analise os resultados gráficos, discutindo-os. ***Parâmetros adicionais conhecidos***: $C = 1\,\mathrm{Ns/m};\ C_\theta = 1\,\mathrm{Nms}$.

(t) Repita as simulações anulando alternadamente os coeficientes dos amortecedores translacionais e rotacional, i.e.: (i) $C = 0\,\mathrm{Ns/m};\ C_\theta = 1\,\mathrm{Nms}$; (ii) $C = 1\,\mathrm{Ns/m};\ C_\theta = 0\,\mathrm{Nms}$.

(u) Multiplique os valores dos coeficientes de amortecimento por 10 e repita as simulações anteriores de forma sistemática, analisando o comportamento dinâmico do sistema. Faça testes com outros valores.