ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

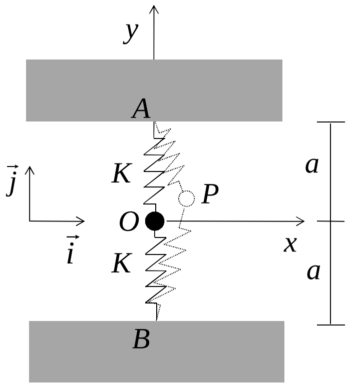
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 - MECÂNICA II

Exercício de Modelagem e Simulação Computacional # 02 - 29/05/2015

(Baseado na questão 2 da terceira prova de PME2200 – 2012)

Uma pequena esfera de massa *m*, idealizada como uma partícula material, *P*, pode se movimentar, sem atrito, sobre um plano horizontal. Esta esfera está ligada aos pontos *A* e *B*, nas paredes verticais fixas, através de duas molas ideais, lineares e idênticas, de constante elástica *K* e comprimento natural *L*. A distância entre as paredes verticais é 2*a*. Utilizando as coordenadas generalizadas (*x*,*y*), pede-se:



(a) Escrever a expressão da energia cinética $T(\dot{x},\dot{y})$ do sistema;
(b) Escrever os vetores de posição relativa (*P*-*A*) e (*P*-*B*) e montar a função de energia potencial elástica $V(x,y)$ do sistema;
(c) A partir das equações de Lagrange, deduzir as equações de movimento do sistema e mostrar que a origem *O* é ponto de equilíbrio (equilíbrio trivial);

(d) Das respectivas formas quadráticas das funções de energia cinética, $T_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$, e de energia potencial, $V_2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}^t\mathbf{K}\mathbf{q}$, representativas do sistema em torno da posição de equilíbrio trivial, onde $\mathbf{q} = [x \quad y]^t$ é o vetor de coordenadas generalizadas, *monte* a matriz de massa $\mathbf{M}$ e a matriz (Hessiana) de rigidez $\mathbf{K} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{(0,0)}$;

(e) Escrever as equações de equilíbrio linearizadas em torno da origem, expressando-as em forma matricial, em função das matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$.
(f) Considere o parâmetro $\alpha = L/a$ e as seguintes situações: (i) $0 < \alpha < 1$; (ii) $\alpha = 1$; (iii) $\alpha > 1$. Analise a natureza do ponto de equilíbrio trivial quanto à sua estabilidade local nas três situações. O que se pode concluir?
(g) Tomando a função potencial geral, construída no item (b), deduza a equação que permite calcular as possíveis posições de equilíbrio, em função do parâmetro $\alpha = L/a$. Para tanto utilize a condição de extremo (que deve ser satisfeita no equilíbrio) $\left.\frac{\partial V}{\partial q_j}\right|_{q_{j_{eq}}} = 0,\ j = 1,2$. Verifique existir simetria de posição das raízes, para $\alpha = L/a > 1$, e dê sua interpretação. Tente inspecionar a estabilidade do sistema em torno destes pontos de equilíbrio a partir da respectiva matriz Hessiana.
(h) Resolvendo numericamente as equações deduzidas no item acima, construa o *diagrama de bifurcação* do ponto de equilíbrio, mostrando a coordenada *y* do ponto de equilíbrio em função do parâmetro (de controle) $\alpha = L/a$, no intervalo $0 < \alpha < 2$.
(i) Elabore um programa de simulação, em ambiente SCILAB, que permita resolver as equações não-lineares.

Conjunto de parâmetros e condições iniciais a serem utilizados nas simulações

K= 10 N/m (constante elástica das molas)
m = 50 g (massa da esfera idealizada como partícula)
tempo de simulação: 10 segundos (passo de integração $\Delta t \leq 0{,}01\ s$)

Demais parâmetros e condições iniciais são dados na tabela 1.

<u>Tabela 1</u>: conjunto de parâmetros e condições iniciais a serem simulados

simulação	***x(t=0)***	***y(t=0)***	***L (m)***	***a (m)***	***L/a***
1	0,50	0,01	0,05	0,25	0,20
2	0,50	0,05	0,10	0,25	0,40
3	0,50	0,10	0,20	0,25	0,80
4	0,50	0,10	0,25	0,25	1,00
5	0,50	0,10	0,30	0,25	1,20
6	0,50	0,10	0,35	0,25	1,40
7	0,50	0,10	0,40	0,25	1,60
8	0,50	0,10	0,45	0,25	1,80
9	0,50	0,40	0,45	0,25	1,80
10	0,70	0,30	0,50	0,25	2,00

(j) Simule a dinâmica do sistema utilizando os parâmetros e condições iniciais dados na Tabela 1. Para <u>cada</u> umas das situações, execute as seguintes tarefas:

(j.1) construa gráficos mostrando a evolução temporal das variáveis de estado $x, \dot{x}; y, \dot{y}$;

(j.2) construa gráficos mostrando os espaços de fase $(x, y); (x, \dot{x}); (y, \dot{y})$. Procure interpretar as semelhanças e diferenças à luz do que foi solicitado nos itens (f) e (g) (e cuja discussão pormenorizada consta da resolução do exercício 2 da terceira prova de PME 2200 de 2012);

(j.3) construa gráficos da energia potencial em função do tempo. Observe as diferenças existentes em função dos valores de *L/a*.