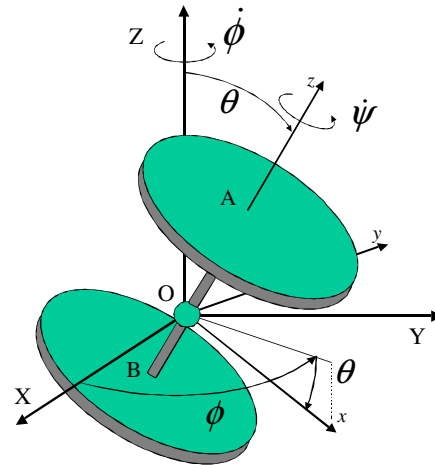




**3º Exercício de Modelagem e Simulação Computacional – EMSC #3**  
**PME 2200 – MECÂNICA B – 29 de maio e 11 de junho de 2013**

O sistema mostrado na figura ao lado é composto pelo eixo AB, de comprimento  $2L$  e massa desprezível, ao qual são fixados rigidamente dois discos de massa  $m$  e raio  $R$ . Considera-se como desprezível a espessura dos discos. O sistema de coordenadas  $Oxyz$  acompanha o conjunto, que pode girar em torno do eixo  $Oz$ .  $O$  é uma articulação, fixa em um referencial inercial. Utilizando os ângulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$  como coordenadas generalizadas, realize as seguintes atividades:



- Construa a função de energia cinética do sistema.
- Construa a função de energia potencial do sistema.
- Das equações de Lagrange, deduza as equações de movimento nas coordenadas  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$ .
- Verifique que as equações de movimento obtidas no item anterior podem ser escritas na forma das Equações (6.45) da apostila “Dinâmica de Corpos Rígidos”\*, com  $M_{Oy} \equiv 0$ . Note que os termos entre parênteses da primeira e terceira equações são, respectivamente, as componentes  $K_{Oz}$  e  $K_{Oz}$  do momento angular, em torno dos eixos  $OZ$  e  $Oz$ . Na situação estudada, são *invariantes do movimento*.
- Observando a relação existente entre os dois invariantes, dada pela equação (6.46), mostre que o movimento pode ser descrito por uma única equação, a Eq. (6.49). Note que as condições iniciais para a integração desta equação devem ser compatíveis com os dois invariantes.
- Implemente a equação do item (e) em ambiente de simulação numérica.
- Teste o modelo SCILAB, com a equação não-linear. Simule primeiramente o caso geral de precessão pseudo-regular, com os dados e condições iniciais abaixo.

$$m=15,0 \text{ kg}; R=0,35 \text{ m}; L=0,05 \text{ m}; \theta=\pi/4;$$

$$\dot{\psi} = 20 \text{ rd/s}; \dot{\phi} = -40 \text{ rd/s};$$

Intervalo de integração sugerido 0.001 s;

Obs.: Note que os invariantes  $\alpha$  e  $\beta$  dependem da condição cinemática inicial.

\* Pesce, C. P., DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS, Monografia EPUSP/PME: disponível em [www.poli.usp.br/d/pme2200](http://www.poli.usp.br/d/pme2200).



---

Departamento de Engenharia Mecânica

- h) Plote gráficos de  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$ . Observe as características da precessão pseudo regular;
- i) A partir da equação de movimento em  $\theta$ , determine uma condição algébrica de precessão estacionária (neste caso também denominada 'precessão livre', posto que há ausência de binários externos; ver item 6.4.2). Com o auxílio desta condição algébrica, determine a velocidade angular de precessão,  $\dot{\phi}$ , compatível com uma precessão estacionária, quando  $\theta = \pi/4$  e com velocidade de rotação própria,  $\dot{\psi}$ , de 20 rd/s;
- j) Nas condições de precessão estacionária determinadas no item anterior, simule o movimento até o instante  $t = 1.0$  s, sem esquecer de impor a condição inicial  $\dot{\theta} = 0.0$ ; armazene os valores de  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$  neste instante;
- k) Plote gráficos de  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$ : Observe as características da precessão estacionária;
- l) Imagine agora que um momento impulsivo foi aplicado na direção oposta a  $Oy$ , modificando instantaneamente  $\dot{\theta}$  de zero para 1.5 rd/s; simule o movimento decorrente até o instante  $t = 6.0$  s; observe as características desta nova precessão; plote a trajetória do ponto A no sistema OXYZ.
- m) Repita os itens j) a l) utilizando rotação própria duplicada; observe novamente a cinemática do sistema e procure explicá-la, quanto a amplitudes e frequências de oscilações. Como você explicaria as mudanças observadas entre itens l e m?
- n) Faça  $L = 1.0$  m e investigue a cinemática decorrente.
- o) Varie sistematicamente as condições cinemáticas iniciais e a intensidade do momento impulsivo aplicado. Explore seu modelo de simulação, procurando compreender as várias possibilidades de movimento.