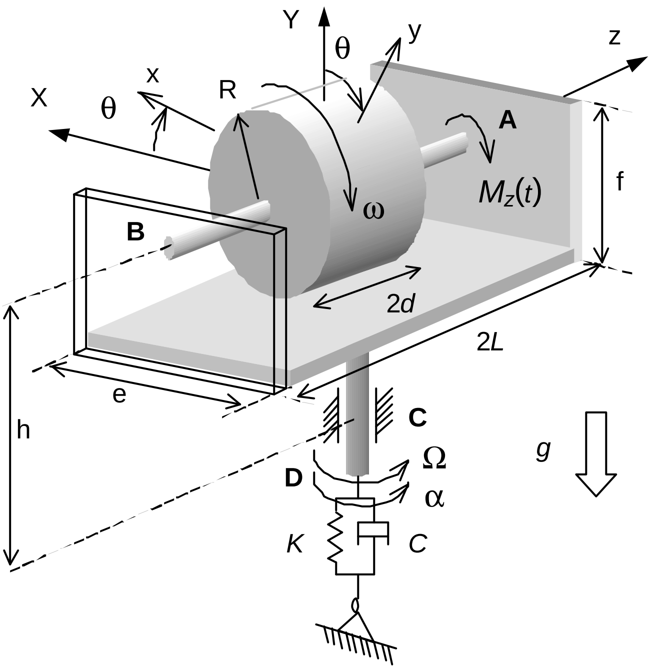
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2º Exercício de Modelagem e Simulação Computacional – EMSC #2
PME 2200 – MECÂNICA B – 22 de abril de 2009



Um rotor de massa m_r está apoiado sobre a base (ou plataforma) $\boldsymbol{ABC}$ de massa m_b, que gira com velocidade angular $\Omega(t)$, com valor inicial Ω_0, guiada pelo mancal $\boldsymbol{C}$, conforme mostrado na figura. O eixo esbelto do rotor, de comprimento $2L$**,** é apoiado sobre os mancais $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. O rotor gira em torno do eixo z, com velocidade angular $w(t)$, acionado por um torque externo $M_z(t)$. O conjunto pode se movimentar verticalmente sobre o apoio elástico do mancal $\boldsymbol{C}$. Este apoio tem rigidez de constante K e apresenta amortecimento viscoso linear com coeficiente C.

Realizar as seguintes atividades:

a) Faça o diagrama (de forças) de corpo livre para o rotor; a seguir. determine a matriz de inércia do rotor, utilizando o sistema de eixos $Oxyz$, o qual orienta o referencial do rotor (O pertencente ao eixo $\boldsymbol{AB}$ e localizado a meio vão).

b) Faça o diagrama (de forças) de corpo livre para a base, utilizando o sistema de eixos $OXYZ$ que orienta o referencial da base (ou plataforma). A força reativa, aplicada pela mola ao conjunto, é dada por $F_m = -KY$ e a força reativa, aplicada pelo amortecedor, é $F_a = -C\dot{Y}$, onde Y é a coordenada vertical do ponto $\boldsymbol{D}$, ponto de acoplamento da mola com o conjunto.

c) Aplicando o **TMA** ao rotor, deduza três das equações que regem a sua dinâmica. Utilize o pólo em O do sistema $Oxyz$. Mostre que estas equações são:

$$J_x\,\dot{\Omega}\,\mathrm{sen}q + (J_x + J_z - J_y)\,\Omega w \cos q = M_x\,, \tag{I}$$

$$J_y\,\dot{\Omega}\cos q + (J_x - J_z - J_y)\,\Omega w\,\mathrm{sen}q = M_y\,, \tag{II}$$

$$J_z\,\ddot{q} + (J_y - J_x)\,\Omega^2\,\mathrm{sen}q\,\cos q = M_z\,, \tag{III}$$

onde: $w = \dot{q}$; ($M_x(t)$; $M_y(t)$) são as componentes do binário reativo aplicado ao rotor através dos vínculos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ e $M_z(t)$) é o *torque externo* de acionamento do rotor.

d) Utilizando o **TMB** deduza a equação:

$$(m_r + m_b)\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = -(m_r + m_b)\,g\,, \tag{IV}$$

que rege o movimento vertical do conjunto (direção Y). Calcule o período natural não amortecido do conjunto, associado ao movimento nesta direção.

e) Implemente as equações dos itens c) e d) em ambiente de simulação numérica e realize a simulação dos movimentos considerando que o torque de acionamento do rotor seja dado por $M_z(t) = M_o(1 - w(t)/w_o)$. Considere as seguintes condições iniciais: posições: $a(0) = 0$;

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886
Departamento de Engenharia Mecânica

$q(0)=0$; $Y(0)=0$; e velocidades: $\Omega(0)=10$ rad/s; $w(0)=0$; $\dot{Y}(0)=0$. Utilize, na simulação, intervalos de amostragem gráfica de 0.001 segundos. Faça a simulação por 10 segundos. Note que $Y(0)=0$ corresponde à posição do sistema em que a mola não está deformada.

f) Faça um gráfico da variação temporal da velocidade angular $\Omega(t)$. Faça também um gráfico do torque de acionamento do rotor $M_z(t)$. Interprete os resultados alcançados.

g) Faça um gráfico da variação temporal da velocidade angular do rotor $w(t)$ e determine seu valor assintótico. Faça um gráfico temporal da variação da posição vertical $Y(t)$ do conjunto e interprete o movimento nos primeiros instantes $(t<1{,}0\ \text{s})$. Qual é o valor $\bar{Y}$ que corresponde ao equilíbrio? A partir do gráfico de $Y(t)$, avalie o período do movimento amortecido, comparando-o com o valor obtido no item d). Discuta o resultado.

h) Até o item g), anterior, o rotor estava perfeitamente balanceado (simétrico). Fixe, agora, duas massas pontuais e idênticas, m_1 e m_2, na superfície externa do rotor, em pontos P_1 e P_2 de coordenadas $(0,+R,+d)$ e $(0,+R,-d)$, medidas no sistema $Oxyz$. Determine a nova matriz de inércia e a excentricidade do baricentro, do rotor de massa (m_r+2m) indicada pela coordenada y_G. Re-deduza, por sua vez, as equações de movimento (III) e (IV) dos itens c) e d), obtendo:

$$J_z\ddot{q}+(J_y-J_x)\,\Omega^2\,\text{sen}\,q\cos q-(m_r+2m)(\ddot{Y}+g)\,y_G\,\text{sen}\,q=M_z(t)\,, \quad \text{(V)}$$

$$(m_r+2m+m_b)\ddot{Y}+C\dot{Y}+KY=(m_r+2m)\,y_G(\dot{w}\,\text{sen}\,q+w^2\cos q)-(m_r+2m+m_b)\,g \quad \text{(VI)}$$

i) Utilizando as equações (I) e (II) do item c), obtenha:

$$-(J_y-J_x)(\dot{\Omega}\,\text{sen}\,q\cos q+\Omega\dot{q}(\cos^2 q-\text{sen}^2 q))+J_z\Omega\dot{q}=M_X\,, \quad \text{(VII)}$$

$$(J_x\,\text{sen}^2 q+J_y\cos^2 q)\,\dot{\Omega}-2(J_y-J_x)\Omega\dot{q}\,\text{sen}\,q\cos q=M_Y\,, \quad \text{(VIII)}$$

Onde M_X e M_Y são as componentes do momento aplicado ao rotor nas direções X e Y, respectivamente. Interprete o termo (J_y-J_x) presente nas equações.

j) Aplicando o **TMA** à base (plataforma) obtenha:

$$J_{bY}\,\dot{\Omega}=M_{CY}-M_Y\,, \quad \text{(IX)}$$

onde M_{CY} é o torque resistivo aplicado ao eixo vertical pelo mancal ***C***. Considerando, ainda, ausência de torque resistivo, ou seja, que a base possa girar livremente sobre o mancal (e que, portanto, $M_{CY}=0$) e utilizando as equações (VII) e (VIII), determine $\dot{\Omega}$ e M_X.

k) Incorpore as novas equações ao simulador e simule novamente o comportamento do sistema.

l) Faça um gráfico temporal da variação da velocidade angular da plataforma, $\Omega(t)$, da velocidade angular do rotor, $w(t)$, e da variação da posição vertical do conjunto, medida por $Y(t)$. Interprete os movimentos.

m) Faça o gráfico temporal da variação das reações verticais nos mancais ***A*** e ***B*** (na direção Y).

n) Faça o gráfico temporal da variação das reações horizontais nos mancais ***A*** e ***B*** (na direção X) e interprete todos os resultados obtidos.

Dados: $m_r=20$ kg; $m_b=10$ kg; $m_1=m_2=m_r/50$; $K=120\times10^3$ N/m; $C=500$ N/(m/s); $M_0=10{,}0$ Nm; $w_o=80$ rad/s; $R=0{,}10$ m; $L=0{,}03$ m; $d=0{,}02$ m; $g=9{,}81$ m/s^2; $J_{bY}=0{,}1$ kgm^2.