ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

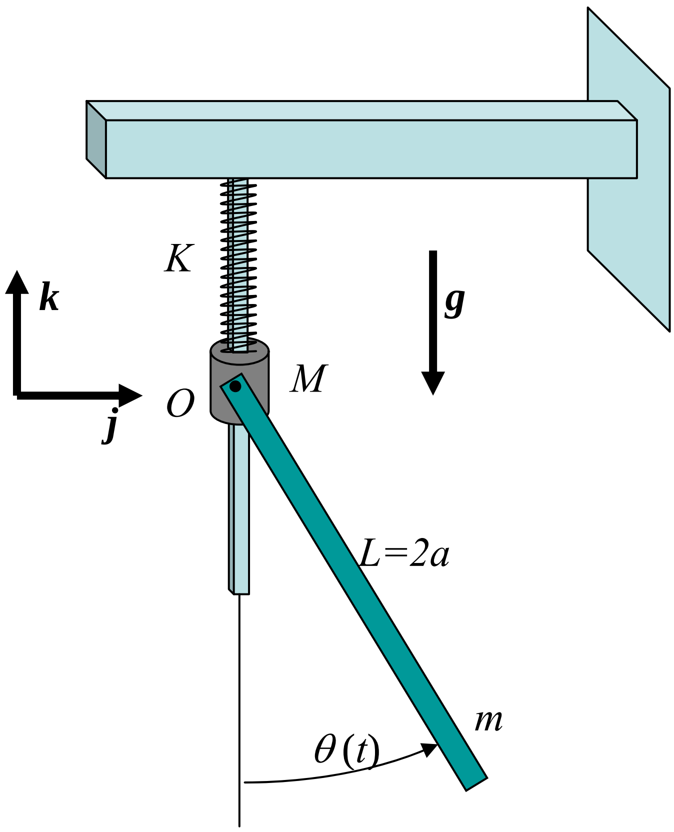
Departamento de Engenharia Mecânica

PMC 2200 - MECÂNICA B - Exercício Computacional # 02- 07/05/2007

A figura abaixo mostra um sistema formado por um pêndulo (composto), de massa m e comprimento $L = 2a$, que é articulado pela extremidade O a uma peça cilíndrica de massa M. Esta peça pode deslizar sobre a guia vertical de seção quadrada e está presa, por meio de uma mola linear de constante K, a uma barra horizontal de grande rigidez.

O objetivo é modelar e analisar a dinâmica deste sistema em duas situações:

(i) em oscilação livre;
(ii) em oscilação forçada, através da aplicação de uma aceleração oscilatória à peça cilíndrica.



As tarefas solicitadas são de três naturezas, listadas abaixo e detalhadas na página seguinte:

1. Modelagem do sistema dinâmico: deduzindo as equações do movimento e interpretando-as.
2. Modelagem do sistema através do *software* SCILAB, utilizando a ferramenta SCICOS.
3. Simulação do modelo computacional, com consequente análise e interpretação dos resultados numéricos.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337   Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

1 Modelagem do sistema dinâmico; deduzindo e interpretando as equações do movimento.

Parte A

(a) ***Deduza*** as equações de movimento do sistema (Eq. (1), abaixo), nas variáveis $z(t)$ e $\theta(t)$. A coordenada vertical $z(t)$ do ponto O é medida a partir da posição de equilíbrio do sistema. Considere que não haja qualquer força externa aplicada, a não ser as de origem gravitacional. Note o acoplamento não-linear através dos termos de aceleração e velocidade angular.

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{z}+(ma\,\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{\theta}+ma\dot{\theta}^2\cos\theta+Kz=0\\ (ma\,\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{z}+\dfrac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}+mga\,\mathrm{sen}\,\theta=0\end{cases} \tag{1}$$

(b) ***Linearize*** as equações obtidas, supondo pequenos deslocamentos $\theta(t)$ e pequenas velocidades $\dot{\theta}(t)$. O que você pode concluir acerca do acoplamento das equações?

(c) Monte o sistema de equações linearizadas na forma matricial e, resolvendo o problema de autovalor associado, ***determine***, analiticamente, as freqüências naturais Ω_1 e Ω_2 do sistema.

(d) Calcule a razão $\beta=\left(\Omega_1/\Omega_2\right)$. Tente inferir o que ocorrerá quando esta razão for do tipo: ...1:4; 1:2; 1:1; 2:1; 4:1, etc.

(e) Inclua nas equações deduzidas em (a) um termo dissipativo, linear na velocidade $\dot{z}(t)$, modelando um atrito lubrificado (ou seja, considere uma força dissipativa $\vec{F}_D=-C\dot{z}(t)\vec{k}$, de constante de proporcionalidade $C>0$, aplicada pela guia sobre a peça cilíndrica).

Parte B

(f) ***Considerando conhecido o movimento da peça cilíndrica***, a dinâmica fica restrita a uma única equação de movimento, na variável $\theta(t)$. Impondo $z(t)=z_0\cos\omega t$ esta equação toma a forma da Eq. (2) abaixo. ***Deduza-a***:

$$\ddot{\theta}+\Omega_2{}^2\left(1-\frac{\omega^2 z_0}{g}\cos\omega t\right)\mathrm{sen}\,\theta=0;\quad \Omega_2=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a}} \tag{2}$$

Quando o deslocamento $\theta(t)$ é pequeno, a versão linearizada desta equação é conhecida como Equação de Mathieu não-amortecida, a qual é usualmente encontrada na literatura técnica na seguinte forma adimensional:

$$\ddot{\theta}+(\delta-2\varepsilon\cos 2\tau)\theta=0;\qquad \text{com:}\quad 2\tau=\omega t;\ \delta=\left(\frac{2\Omega_2}{\omega}\right)^2;\ \varepsilon=2\frac{\Omega_2{}^2 z_0}{g} \tag{3}$$

Nesta forma linear adimensional, o tempo t assume a forma τ. O parâmetro adimensional δ mede a sintonia e é definido como o quadrado da razão entre a freqüência natural do oscilador linear que representa o pêndulo e a metade da freqüência imposta ao movimento vertical da articulação. O parâmetro adimensional ε é o dobro da amplitude da aceleração imposta, comparada com a aceleração da gravidade. A excitação harmônica imposta é dito paramétrica, na medida em que faz com que o parâmetro de rigidez do oscilador varie ciclicamente. Se houver dissipação linear proporcional à velocidade angular, a equação (2) é dita amortecida e fica escrita:

$$\ddot{\theta}+\frac{3}{4ma^2}B\dot{\theta}+\Omega_2{}^2\left(1-\frac{\omega^2 z_0}{g}\cos\omega t\right)\mathrm{sen}\,\theta=0;\quad \Omega_2=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a}} \tag{4}$$

(g) Tente inferir o que acontecerá com o comportamento da equação deduzida em (f) quando $\omega^2 z_0/g>1$, ou seja, quando $2\varepsilon>\delta$. Pense na ação de uma mola cuja rigidez varia ciclicamente com o tempo. O que acontecerá com o ponto de equilíbrio trivial, em termos de sua estabilidade? Faça uma pesquisa e localize na literatura, ou em textos da internet, o “diagrama de estabilidade da equação de Mathieu”.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2 Modelagem do sistema através do *software* SCILAB, utilizando a ferramenta SCICOS.

Parte A

(h) ***Elabore*** em ambiente SCICOS/SCILAB um diagrama de blocos de acordo com a apostila tutorial, representando as duas equações (acopladas) de movimento, deduzidas no item (a). ***Para tanto você deverá re-escrever as Eqs. (1) de forma a isolar os termos de aceleração***; ou seja, você deve resolver algebricamente as equações (1) nas acelerações, antes de fazer o diagrama SCICOS, caso contrário você encontrará um ‘loop lógico’.

‘Dica’: da Eq. (1b), escreva a aceleração angular $\ddot{\theta}$ como função da aceleração vertical $\ddot{z}$ e substitua a expressão na Eq. (1a).

(i) ***Elabore*** um segundo diagrama de blocos com a versão linearizada das Eqs (1).

(j) ***Inclua***, nos dois diagramas, o termo dissipativo conforme solicitado no item (e).

(k) ***Inclua***, no diagrama, saídas gráficas para as variáveis cinemáticas: $z(t),\theta(t)$; $\dot{z}(t),\dot{\theta}(t)$ e $\ddot{z}(t),\ddot{\theta}(t)$, ou seja, gráficos temporais de posição, velocidades e acelerações.

Parte B

(l) ***Elabore*** um terceiro diagrama de blocos, representando a equação de movimento, deduzida no item (f). ***Inclua*** no diagrama um termo dissipativo conforme solicitado no item (e).

(m) ***Elabore*** um diagrama correspondente à versão linearizada da Eq. (2), também incluindo o termo dissipativo.

(n) ***Inclua***, nos dois diagramas, saídas gráficas para as variáveis cinemáticas: $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ ou seja, gráficos temporais de posição e velocidade angular.

3 Simulação do modelo computacional, com consequente análise e interpretação dos resultados numéricos

Parte A..

(o) Teste o diagrama SCICOS/SCILAB, com a equação não-linear, em oscilação livre, elaborado em (h). Considere os parâmetros e as condições iniciais dadas abaixo. Plote gráficos temporais de: $z(t),\theta(t)$; $\dot{z}(t),\dot{\theta}(t)$ e $\ddot{z}(t),\ddot{\theta}(t)$. Plote também diagramas $\{z(t);\dot{z}(t)\}$, $\{\theta(t);\dot{\theta}(t)\}$ (que são denominados diagramas de fase). . Analise os resultados e interprete-os.

(p) Varie o parâmetro de rigidez da mola *K*, de forma que a razão $\beta=\left(\Omega_1/\Omega_2\right)$ valha: 1:4; 1:2; 1:1. Repita o procedimento, para os mesmos conjuntos de condições iniciais. Analise os resultados e interprete-os.

(q) Repita a análise com o diagrama elaborado em (i), correspondente ao sistema linearizado, deduzido em (b), para as condições iniciais (1) e (2).

(r) Explore seu modelo SCILAB, procurando compreender as várias possibilidades de movimento que este sistema apresenta.

Parte B

(s) Simule o diagrama elaborado em (l), ou seja para a equação deduzida em (f).

(t) Simule o diagrama elaborado em (m), ou seja para a equação linearizada.

(u) Explore seu modelo SCILAB, procurando compreender as várias possibilidades de movimento que este oscilador apresenta.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

DADOS E PARÂMETROS PARA SIMULAÇÃO

Parâmetros do sistema:
$g = 10\text{m/s}^2$; $M = m = 2\text{kg}$; $a = 0{,}75\text{m}$.

Condições Iniciais e de amortecimento:
Parte A: $K = 40\text{N/m}$; C=0 (sem atrito na guia) (ou $C = 0{,}75(\text{Ns/m})$ (com atrito lubrificado na guia).
tempo de simulação: 25 segundos.
(1) $\left(z(0);\dot{z}(0);\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (0;0;0;0)$; sem amortecimento
(2) $\left(z(0);\dot{z}(0);\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (0;0;\pi/24;0)$; sem e com amortecimento
(3) $\left(z(0);\dot{z}(0);\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (0;0;\pi - 10^{-2};0)$; sem e com amortecimento
(4) $\left(z(0);\dot{z}(0);\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (0;0;\pi;10^{-2},)$; sem amortecimento

Parte B: B=0 (sem amortecimento angular) ou $B = 1{,}0(\text{Nms})$ (com amortecimento);
tempo de simulação: 500 segundos.

(5) $\left(\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (0;0{,}0)$; $\omega = \Omega_2$; $z_0 = 0{,}05m$ ($\delta = 4; \varepsilon = 0.1$); sem amortecimento.
(6) $\left(\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (10^{-4};0)$; $\omega = \Omega_2/2$; $z_0 = 0{,}05m$ ($\delta = 16; \varepsilon = 0.1$); sem e com amortecimento
(7) $\left(\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (10^{-4};0)$; $\omega = \Omega_2$; $z_0 = 0{,}05m$ ($\delta = 4; \varepsilon = 0.1$); sem e com amortecimento
(8) $\left(\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (10^{-4};0)$; $\omega = 2\Omega_2$; $z_0 = 0{,}05m$ ($\delta = 1; \varepsilon = 0.1$); sem e com amortecimento
(9) $\left(\theta(0);\dot{\theta}(0)\right) = (10^{-4};0)$; $\omega = 2\Omega_2$; $z_0 = 0{,}25m$ ($\delta = 1; \varepsilon = 0.5$); sem e com amortecimento

Note que na Equação de Mathieu: $\delta = \left(\frac{2\Omega_2}{\omega}\right)^2$; $\varepsilon = 2\frac{\Omega_2{}^2 z_0}{g}$.