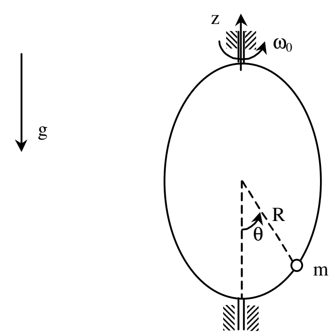
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

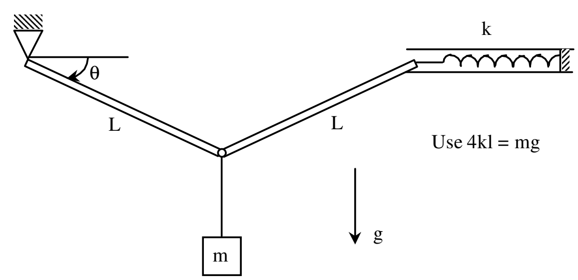
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MECÂNICA B PME 2200
3ª LISTA DE EXERCÍCIOS – MAIO DE 2010

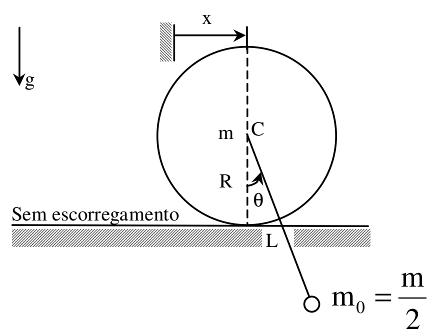
1) A partícula m pode deslizar sem atrito no anel circular que gira ao redor do eixo z com velocidade angular constante $\omega 0$.
   a) Aplique o teorema da resultante para mostrar que a equação diferencial do movimento da partícula é:
   $$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\theta \right) \operatorname{sen}\theta = 0$$
   b) Obtenha a equação acima usando as equações de Lagrange.



2) Considere a massa m da figura. A deformação da mola é nula quando θ vale zero. As barras têm massas desprezíveis.
   a) Escreva a energia potencial total V.
   b) Determine a equação diferencial do movimento.

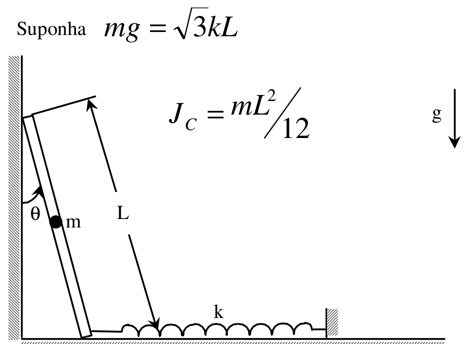


3) Considere o sistema mostrado na figura. O cilindro tem massa m e raio R. O comprimento do pêndulo é L. Use x para descrever o movimento do centro do disco e θ para descrever o movimento angular do pêndulo.
   a) Determine as duas equações de Lagrange para este sistema. Não considere pequenos movimentos.
   b) Linearize as equações diferenciais, assumindo que o movimento angular θ é pequeno.



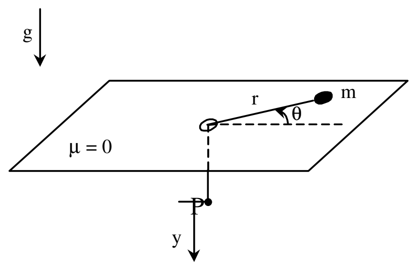
Resp.: b) Se θ é pequeno: $\frac{d}{dt}\left[2\dot{x} + \frac{L\dot{\theta}}{2}\right] = 0$ e $\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0$

4) Considere a barra de comprimento L e massa m. Ela está presa a uma mola de constante elástica k. A força que atua na mola é nula quando θ = 0. Suponha que a extremidade superior da barra permanece na parede vertical e que a extremidade inferior da barra permanece na superfície horizontal. Despreze os atritos.
   a) Determine a equação diferencial do movimento θ (t).
   b) As posições de equilíbrio podem ser encontradas usando $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$, onde V é a energia potencial do sistema. Encontre os ângulos de equilíbrio do sistema.



Resp.: a) $\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{2}kL^2\sin\theta + kL^2\sin\theta\cos\theta = 0$; b) θ = 0 e θ = 30°

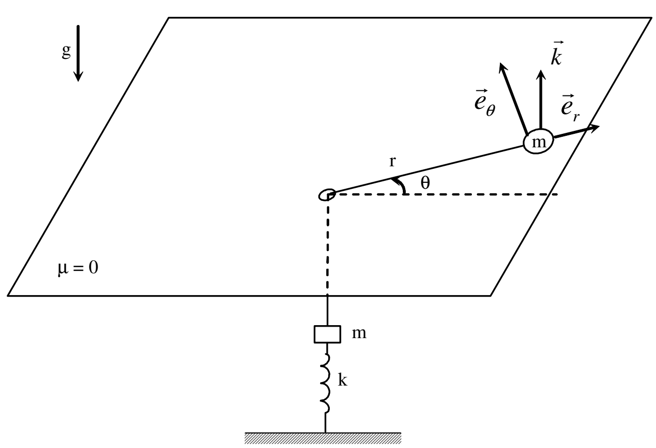
5) Considere o sistema mostrado a seguir. A massa m está ligada a um fio de comprimento constante e que passa por um furo na mesa. O ponto P do fio tem movimento descrito por $y = v_0 t$. Seja em $t = 0$, $y = 0$, $r = R$ e $\dot{\theta} = \omega_0$. Não há atritos. Encontre a(s) equação(ões) do movimento do sistema, admitindo que o fio nunca se afrouxa.

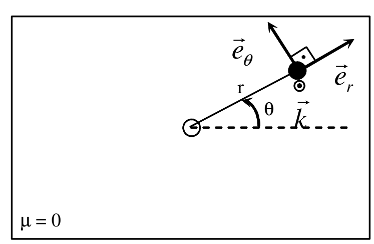


Resp.: $(R - v_0 t)\ddot{\theta} - 2v_0\dot{\theta} = 0 \qquad \dot{\theta} = \dfrac{R^2\omega_0}{(R - v_0 t)^2}$

6) Considere o sistema mostrado a seguir. A massa m está conectada a um fio inextensível que passa por um furo na mesa e está conectada a uma outra massa m que, por sua vez, está conectada a uma mola de constante elástica k. A força na mola é nula quando r = 0. Use r e θ como coordenadas. O tampo da mesa é horizontal e não há atritos. Encontre as equações do movimento do sistema, admitindo que o fio nunca se afrouxa.

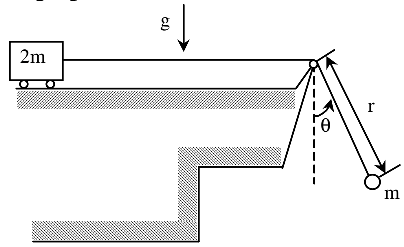
Resp.: $2m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + kr = -mg$ e $mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$





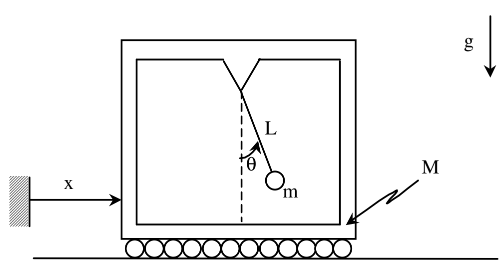
Vista superior

7) O carrinho de massa 2m está preso a uma massa m por meio de um fio inextensível. O fio passa por uma polia. Sejam r a distância da polia à massa m e θ o ângulo do fio com a vertical. Encontre as duas equações de Lagrange para o sistema.



Resp.: $3m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = 0$ e $mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$

8) O vagão de massa M suporta um pêndulo simples de comprimento L e massa m. O vagão pode deslocar-se horizontalmente sem atrito. Suponha que x descreva o movimento do vagão e que θ forneça a inclinação do pêndulo. Use x e θ como coordenadas generalizadas para o problema.
   a) Escreva a função da energia cinética T.
   b) Escreva a função da energia potencial V.
   c) Escreva a equação de Lagrange para a coordenada x.
   d) Escreva a equação de Lagrange para a coordenada θ.

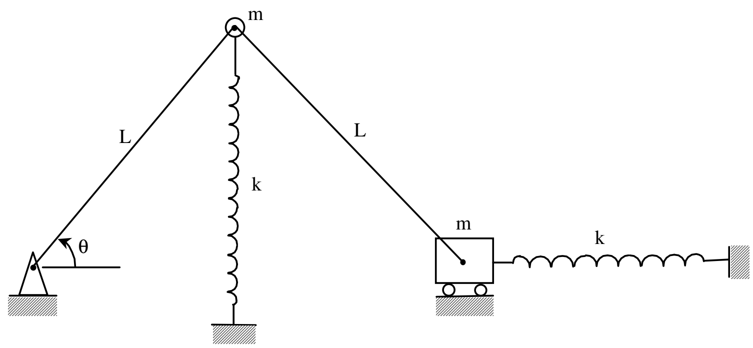


Resp.: c) $(M+m)\ddot{x} + mL(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 0$

d) $mL\ddot{x}\cos\theta + mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0$

9) As barras do sistema da figura têm massa desprezível, e as molas não têm deformação quando o sistema está na horizontal. Pede-se:

   a) Sabendo-se que θ não é pequeno, encontre a equação diferencial para o movimento em θ.
   b) Linearize a equação diferencial para θ = 0.



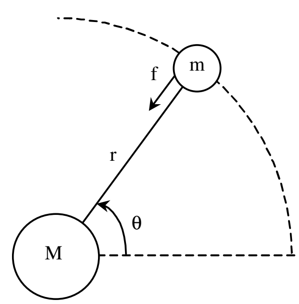
Resp.: a) $mL^2\left(\ddot{\theta} + 4\ddot{\theta}\sin^2\theta + 4\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right) + kL^2\left(4\sin\theta - 3\cos\theta\sin\theta\right) = 0$

b) $\ddot{\theta} + \dfrac{k}{m}\theta = 0$

10) Um satélite está em movimento em volta da Terra. A atração gravitacional é tal que a energia potencial vale:

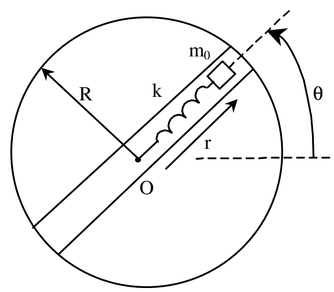
$$V = -\frac{\gamma M m}{r}$$

Usando r e θ como coordenadas, escreva as duas equações de Lagrange.



Resp.: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \dfrac{\gamma M}{r^2} = 0$ $\qquad$ $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$

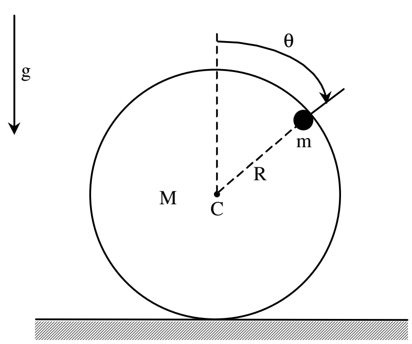
11) O sistema mostrado na figura consiste em um disco com $J_0 = 0{,}5mR^2$. A massa $m_0 = 0{,}25m$ pode deslizar pelo canal sem atrito, restringida apenas por uma mola de constante elástica k, cuja força é nula quando m_0 está no ponto O. Suponha que o disco inicia o movimento em t = 0, tal que $\dot{\theta} = 2$, r = 1 e $\dot{r} = 0$. Após esse instante, nenhum momento é aplicado ao disco. Encontre as equações de Lagrange correspondentes para θ e r.



PLANO HORIZONTAL

Resp.: $2R^2\ddot{\theta} + r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{r} + \left(\frac{4k}{m} - \dot{\theta}^2\right)r = 0$

12) Considere o disco homogêneo de raio R e massa M mostrado na figura. Uma massa concentrada m é anexada à borda do disco. Suponha que o disco se movimente sem escorregar sobre a superfície horizontal. Utilize o ângulo θ indicado para descrever o movimento. Escreva a energia cinética T usando o centro instantâneo de rotação. Determine a equação diferencial do movimento utilizando a equação de Lagrange. (Sugestão: lembre que $\cos\left(\theta/2\right) = \pm\sqrt{1/2\left(1+\cos(\theta)\right)}$



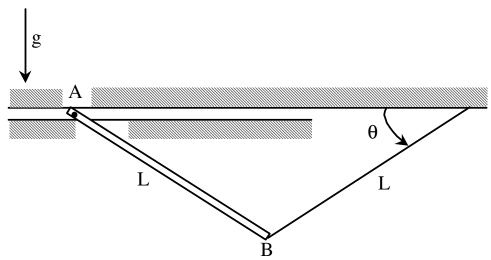
Resp.: $\left(\frac{3}{2}M + 2m + 2m\cos\theta\right)R\ddot{\theta} - mR\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta = 0$

13) O ponto A da barra delgada de comprimento L pode deslizar sem atrito no percurso mostrado na figura. Um fio de comprimento L está preso à extremidade B da barra.

a) Mostre que $I_{IC} = \left(\frac{mL^2}{3}\right)\left(1+6\sin^2\theta\right)$

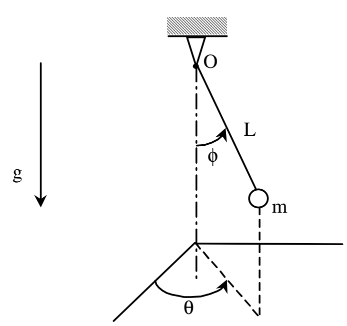
b) Encontre a equação de Lagrange associada à coordenada θ.

c) Suponha que a barra é liberada do repouso em θ = 0. Determine $\dot{\theta}$ em função de θ. Observe que a energia mecânica se conserva.



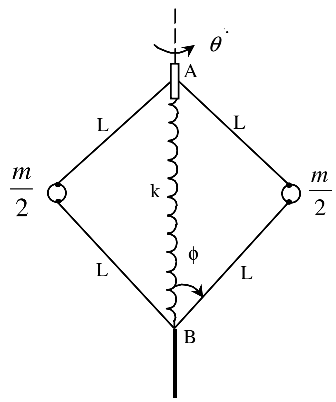
Resp.: b) $\frac{mL^2}{3}\left[\left(1+6\sin^2\theta\right)\ddot{\theta}+6\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right]-mg\frac{L}{2}\cos\theta=0$; d) $\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}\left(\frac{\sin\theta}{1+6\sin^2\theta}\right)$

14) Considere o pêndulo esférico mostrado na figura. Use as coordenadas ϕ e θ, e note que ρ = L = constante. Determine a equação diferencial do movimento usando as equações de Lagrange.



15) Considere o mecanismo mostrado na figura. As barras sem peso estão articuladas num ponto fixo B. As barras superiores estão conectadas a um anel deslizante sem peso em A. A mola, de constante elástica k, entre A e B, está indeformada quando $\phi = 0$. Para $t = 0$, $\phi = 45°$, $\dot{\phi} = 0$ e $\dot{\theta} = \omega_0$. (Note que $\dot{\theta}$ pode acelerar ou desacelerar, ou seja, $\dot{\theta}$ não é constante)

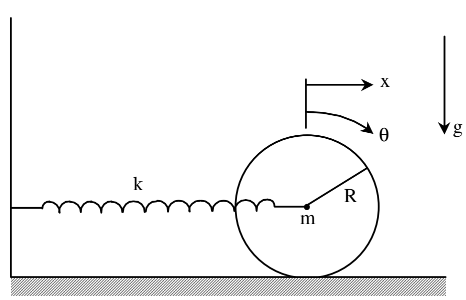
a) Encontre a função Lagrangeana.
b) Escreva a equação do movimento usando as equações de Lagrange.



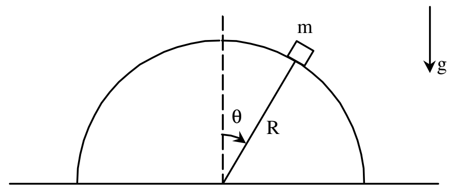
Despreze os efeitos gravitacionais

Resp.: $mL^2\ddot{\phi} - \dfrac{a^2\cos\phi}{mL^2\sin^3\phi} + 4kL^2(1-\cos\phi)\sin\phi = 0$ onde $\alpha = \dfrac{1}{2}mL^2\omega_0$;

16) O cilindro de massa m e raio R rola sem escorregar sobre o plano horizontal. Escrever a equação do movimento do sistema.

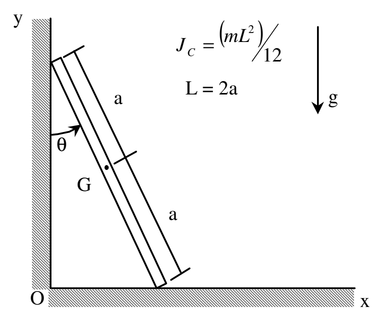


17) Uma partícula se desloca sobre uma superfície cilíndrica de raio R. Determine a equação diferencial para o parâmetro θ.



Resp.: $\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

18) A barra delgada de massa m e comprimento L = 2a desliza pela parede mostrada na figura. Não há atrito com a parede nem com o piso. Use o ângulo θ para descrever o movimento. Escreva a equação para o movimento da barra utilizando a equação de Lagrange.



Resp.: $\ddot{\theta} - \frac{3g}{4a}\sin\theta = 0$