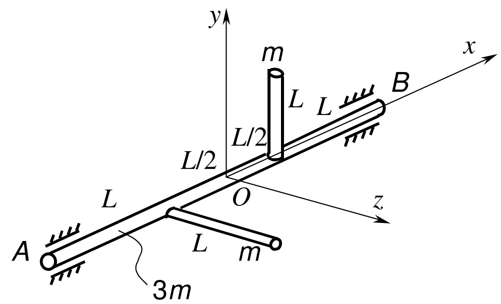
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
1ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PME2200 – MECÂNICA B
DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO
MARÇO DE 2010

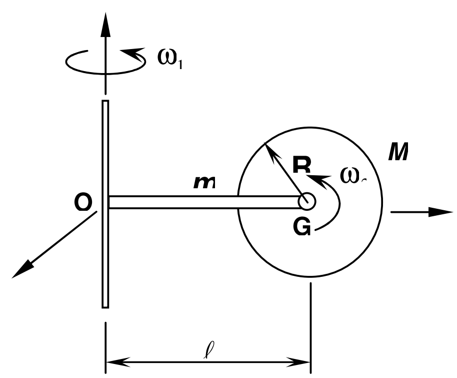
1) A figura ao lado mostra um eixo de massa 3m e comprimento 3L ao qual estão presas duas barras longitudinais idênticas, de comprimento L e massa m. Pedem-se:
a) as coordenadas do centro de massa do sistema e
b) a matriz de inércia do conjunto em relação ao sistema de eixos $Oxyz$.

Dado: $J_y = \frac{mL^2}{12}$ (G; m,L)



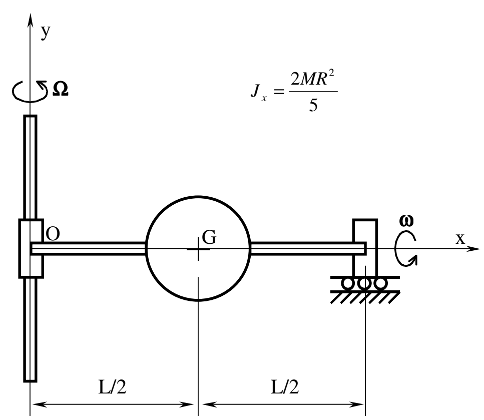
Resp.: $J_{xz} = \frac{ml^2}{4}$; $J_y = \frac{37ml^2}{12}$

2) O disco de massa M gira com velocidade angular constante ω_2 em relação ao eixo OG de massa m, que por sua vez gira com velocidade angular constante ω_1 em torno do eixo y. Pede-se:determinar o momento angular do disco em relação ao pólo O.



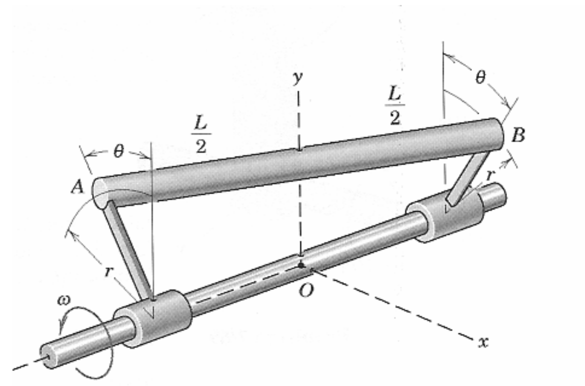
Resp.: $\vec{H}_O = M\left[\left(\frac{R^2}{4} + \ell^2\right)\omega_1\vec{j} + \frac{R^2}{2}\omega_2\vec{k}\right]$

3) Uma esfera sólida e homogênea, de massa M e raio R, está rigidamente acoplada a uma haste, de massa m, que passa por seu centro de massa G. A haste gira em torno do eixo x com $\vec{\varpi} = \varpi\vec{i}$ e em torno do eixo vertical y com $\vec{\Omega} = \Omega\vec{j}$. Pede-se determinar o momento angular da esfera, em relação ao pólo O.



Resp.: $\vec{H}_O = \frac{2MR^2}{5}\omega\vec{i} + \left(\frac{2MR^2}{5} + \frac{ML^2}{4}\right)\Omega\vec{j}$

4) A barra esbelta uniforme *AB* de massa *m* e comprimento *L* é fixada ao eixo *z* por colares conforme a figura e todo o conjunto rígido gira em torno do eixo *x* com velocidade angular ω . Determine o momento angular $\vec{H}_o$ de *AB* em relação a *O*.

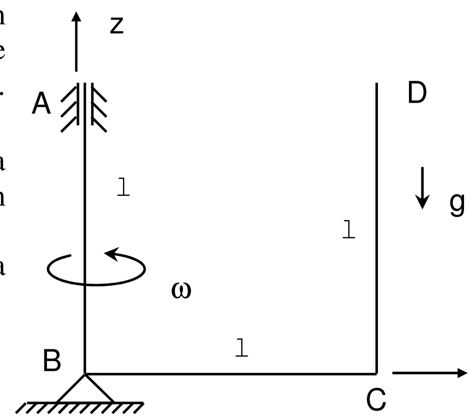


Resp: $\vec{H}_O = \dfrac{mLr}{6}\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\dfrac{4r^2\operatorname{sen}^2\theta}{L^2}}\,\omega\vec{i} + mr^2\left(1-\dfrac{2}{3}\operatorname{sen}^2\theta\right)\omega\vec{k}$

5) A barra homogênea *ABCD* da figura ao lado tem diâmetro desprezível, comprimento total 3ℓ e peso específico ρg por unidade de comprimento. Sendo *A* um anel e *B* uma articulação, pede-se:

a) calcular a velocidade angular ω constante para que as forças horizontais na articulação sejam nulas;

b) determinar as reações nos vínculos para a situação do item a).



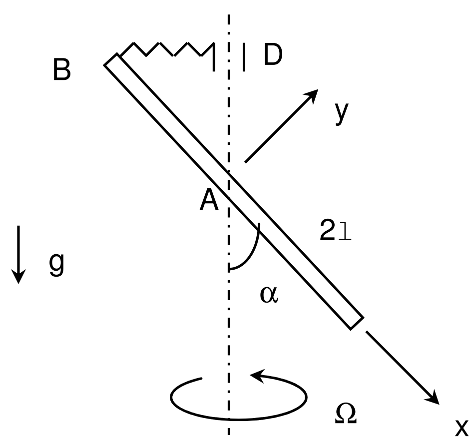
Resp.: a) $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2\ell}}$

b) $X_A = X_B = X_C = 0$; $Z_B = 3\rho g\ell$; $Y_A = -\dfrac{9}{4}\rho g\ell$

6) A barra homogênea de massa 3m e comprimento 3ℓ gira com velocidade angular Ω constante. A mola *BD* permanece sempre horizontal. O sistema de coordenadas (*A, x, y, z*) é solidário à barra. Pede-se, em função de α, utilizando a base indicada:

a) a força na mola BD;

b) as forças na articulação A.



Resp.: a) $F_{mola} = \dfrac{3m}{2}\left(2\ell\Omega^2 sen\alpha - g\tan\alpha\right)$

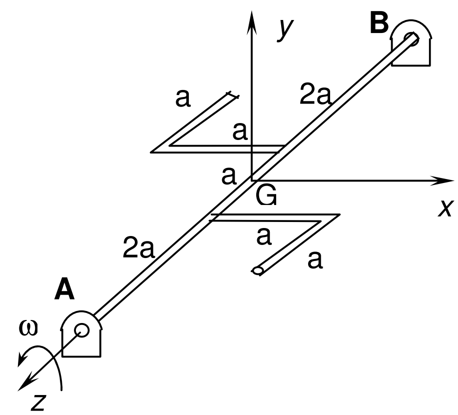
b) $H_A = \dfrac{3m}{2}\left(-3\ell\Omega^2 sen\alpha + g\tan\alpha\right)$

$V_A = 3mg$

(Obs.: reações horizontais e verticais respectivamente)

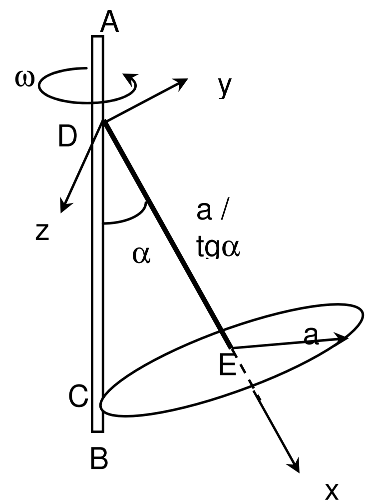
7) O dispositivo da figura é formado por barras de massa ρ por unidade de comprimento e gira com velocidade angular constante ω. Pede-se determinar as reações dinâmicas nos mancais.

Resp.: $X_A = \dfrac{-\rho\, a^2\omega^2}{2}$



8) Um disco de massa *m* e raio *a* está ligado rigidamente a uma barra de comprimento $a/\tan\alpha$ e massa desprezível. A barra está articulada em *D* a um eixo vertical *AB* e o disco se apoia nesse eixo em *C*. O sistema de coordenadas (*D, x, y, z*) é solidário ao plano *DEC*. Sabendo-se que quando se põe o eixo a girar o mesmo ponto do disco permanece em contato com *AB* em *C*, pede-se:

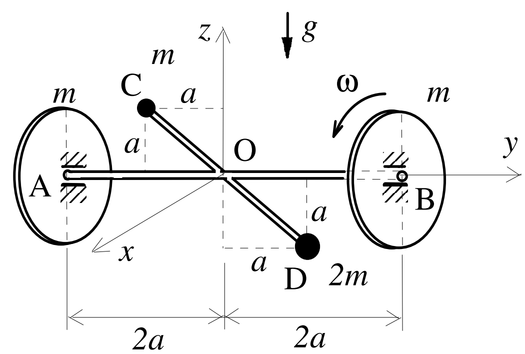
a) o momento angular do disco em relação ao pólo *D*;
b) a velocidade angular ω para que se obtenha reação nula em *C*.



Resp.: b) $\omega^2 = \dfrac{g}{a\left(\dfrac{1}{\tan^2\alpha} - \dfrac{1}{4}\right)sen\alpha}$

9) O eixo AB de massa desprezível e comprimento 4*a* gira com velocidade angular ω constante, apoiado nos mancais A e B. A barra CD tem massa desprezível e é fixa ao eixo no ponto O; nas suas extremidades C e D estão concentradas as massas *m* e 2*m* respectivamente. Junto aos mancais, estão fixados ao eixo os discos A e B de massa *m* e raio *a*. O sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) é solidário às barras, que estão no plano *yz*. Pede-se, para a posição indicada na figura (plano *yz* na vertical):

a) as reações nos mancais A e B;
b) balancear o sistema, adicionando as massas concentradas m_A e m_B na periferia dos discos A e B; determinar os valores de *m*.



Resp.:

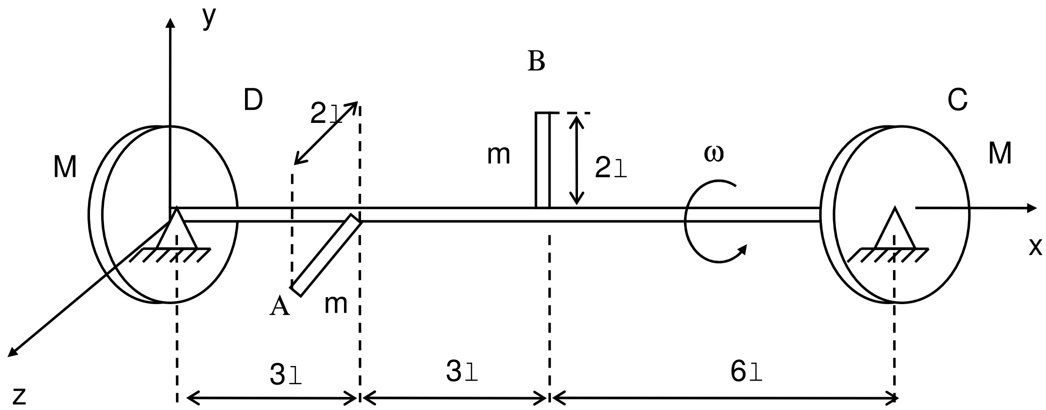
a) $Z_A = \dfrac{9mg - ma\omega^2}{4}$; $Z_B = \dfrac{11mg + 5ma\omega^2}{4}$

b) $m_A = \dfrac{m}{4}$ e $m_B = \dfrac{5}{4}m$ que devem ser adicionadas no plano que contém as barras

10) Duas barras A e B, de comprimento 2ℓ e massas m, são ligadas a um eixo que gira com velocidade angular constante ω. Os volantes C e D, de massas M são presos ao eixo, junto aos mancais de apoio do mesmo. Nestas condições, pede-se:

a) determinar as reações nos mancais C e D;

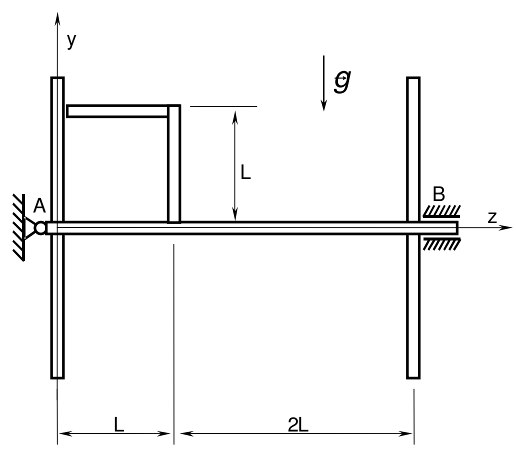
b) balancear o sistema através da colocação de pesos corretivos nos volantes C e D, em pontos à distância 3ℓ do eixo de rotação. Determinar os pesos necessários e suas localizações nos volantes.



11) Duas barras de massa m e comprimento L estão ligadas a um eixo que gira com velocidade angular constante, como indicado na figura. Os volantes A e B, de massa M, raio R e espessura desprezível, estão fixados ao eixo. Considerando o sistema Axyz, solidário ao volante, pede-se:

(a) Determinar as reações (considerando o peso) nos mancais A e B.

(b) Determinar a localização e os valores de duas massas m_1 e m_2, fixadas na parte externa do volantes A e B, suficientes para balancear o sistema.



Resp.: $Y_A = \left(M + \dfrac{3m}{2}\right)g - \dfrac{7mL}{6}\omega^2$

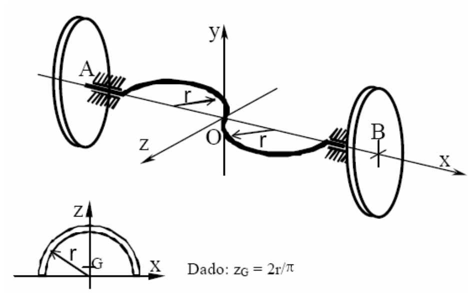
$$m_2 = \frac{mL}{3R} \quad \text{em} \quad (0,-R,3L)$$

12) Uma barra homogênea, com densidade linear de massa ρ, tem a forma indicada na figura. Sabendo que a velocidade angular ω é constante, determinar:

(a) o momento angular da barra em relação a O ;

(b) o ângulo formado pelo momento angular e o eixo AB

c) as reações dinâmicas em A e B.

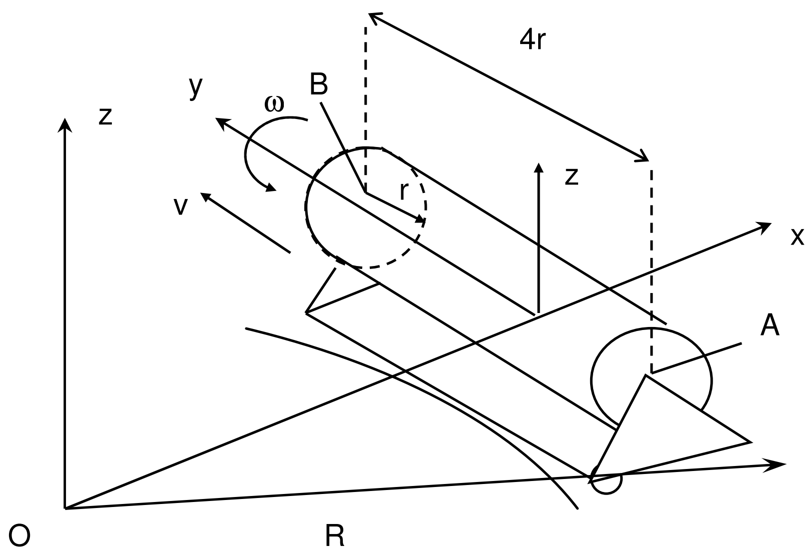


Resp.: a) $H_O = \rho\, r^3\, \omega\, (\pi\, \mathbf{i} - 4\, \mathbf{k})$

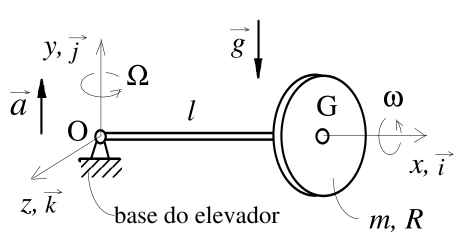
13) Um vagão transporta um rotor de raio *r* e massa *M*. O vagão percorre um trecho circular de raio R com velocidade escalar constante *v*. O rotor gira com vetor de rotação constante $\vec{\omega} = -\omega\vec{j}$ em relação ao vagão. Dados $J_{x_G} = J_{z_G} = \dfrac{19Mr^2}{12}$ e $J_{y_G} = \dfrac{Mr^2}{2}$ para o rotor, pede-se:

a) o vetor de rotação absoluto do rotor e seu momento angular tomando como pólo o seu baricentro G;
b) o momento aplicado pelo rotor no vagão;
c) a aceleração do baricentro do rotor;
d) pergunta-se também qual é o efeito do momento giroscópico sobre o vagão.

Resp.: b) $\vec{M}_{GIR} = -\dfrac{Mr^2\omega v}{2R}\vec{i}$ c) $\vec{a}_G = -\dfrac{v^2}{R}\vec{i}$



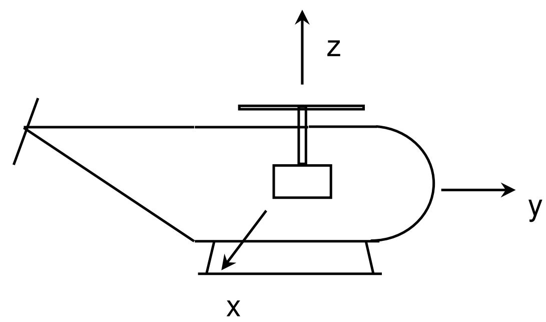
14) No sistema da figura, o disco homogêneo (massa *m*, raio *R*) gira ao redor da barra OG (massa desprezível, comprimento *l*) com velocidade angular constante ω; a barra OG mantém sempre a direção horizontal e gira com velocidade angular constante Ω ao redor do eixo vertical que passa pela articulação O. <u>O conjunto está montado dentro de um elevador que sobe com aceleração constante $a\vec{j}$</u>. Usando o sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) solidário à barra, pede-se:



a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_a$ do disco e a aceleração do seu baricentro;
b) o valor de Ω para que o movimento descrito seja possível (precessão estacionária);
c) supondo conhecido o valor de Ω determinado no item (b), calcule as reações na articulação O;
d) responda e justifique: o movimento descrito será possível se o elevador descer em queda livre?

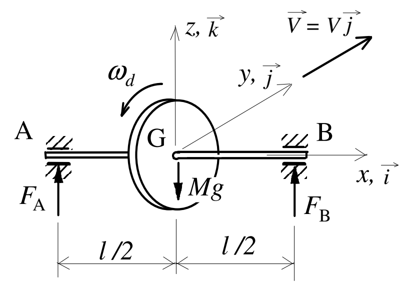
Resp.: a) $\vec{\omega}_a = \Omega\vec{j} + \omega\vec{i}$; $\vec{a}_G = a\vec{j} - \Omega^2 l\vec{i}$ b) $\Omega = \dfrac{ml(a+g)}{\omega J_x}$ c) $X_O = -m\Omega^2 l$; $Y_O = m(a+g)$

15) A massa em rotação (rotor) de um helicóptero é descrita pelos momentos de inércia J_{x_G}, J_{y_G} e J_{z_G} e pelos produtos de inércia $J_{xy_G} = J_{xz_G} = J_{yz_G} = 0$ em relação ao sistema de coordenadas (*G, x, y, z*) indicado na figura, solidário ao rotor, onde *G* é o baricentro do rotor. O vetor de rotação do rotor em relação ao helicóptero é $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. Calcular o binário giroscópico quando o helicóptero inicia uma curva ascendente vertical de raio constante *R* com velocidade escalar constante *v*.



Resp.: $\vec{M}_{GIR} = J_{z_G}\dfrac{\omega v}{R}\vec{j}$

16) Um sistema de sensoreamento de movimento de um avião é baseado no efeito giroscópico. A figura ao lado apresenta o modelo simplificado do sistema que consiste em um disco rigidamente ligado a um eixo AB; a massa total do sistema é *M*. Nos mancais A e B estão instalados sensores de força que medem as forças <u>verticais</u> F_A e F_B (forças dos sensores sobre os eixos). O sistema gira em torno do eixo G*x* com velocidade angular $\vec{\omega}_d = \omega_d\vec{i}$, ($\omega_d > 0$, constante). O sistema de coordenadas G*xyz* é solidário ao avião, sendo $\vec{V} = V\vec{j}$ ($V > 0$, constante) a velocidade de seu baricentro. Durante o movimento o avião descreve uma <u>curva horizontal</u> (i.e. o plano G*xy* permance na horizontal), de raio constante *R* (medido a partir do baricentro do avião). Os sensores idicam: $F_B > F_A > 0$. Indicando os resultados na base solidária ao avião $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pede-se:

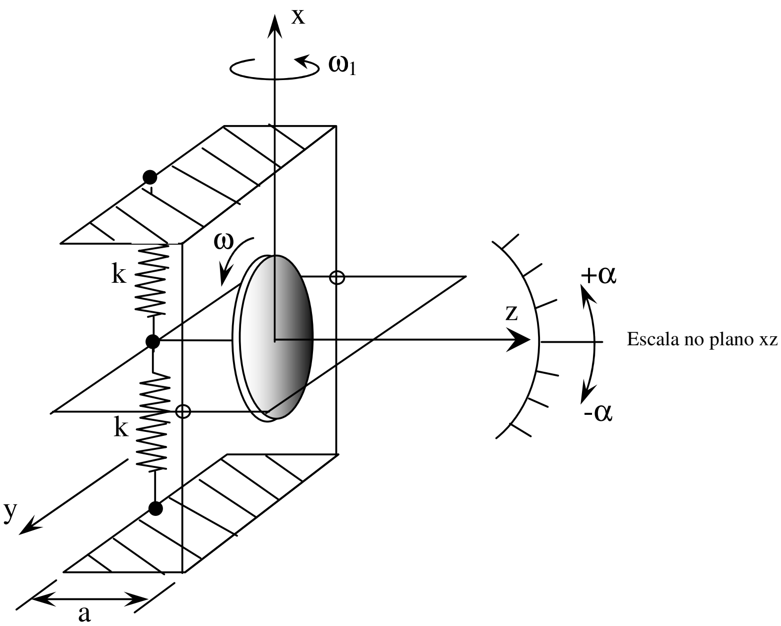


a) o vetor de rotação de arrastamento $\vec{\Omega}$ do sistema móvel, o vetor de rotação absoluto do conjunto $\vec{\omega}$ e seu momento angular, $\vec{H}_G$;
b) escrever a equação de variação do momento angular e determinar o momento das forças externas aplicadas ao eixo em relação a G;
c) indicar o sentido (à direita ou à esquerda) da trajetória descrita pelo avião e determinar o seu raio de curvatura *R*. São dados: momentos de inércia baricêntricos do conjunto disco mais eixo: $J_x = J$ e $J_y = J_z = I$; a distância *l* entre o mancais A e B.

Resp.: a) $\vec{\Omega} = -\dfrac{v}{R}\vec{k}$; $\vec{\omega} = \omega_d\vec{i} - \dfrac{v}{R}\vec{k}$; $\vec{K}_G = J\omega_d\vec{i} - I\dfrac{v}{R}\vec{k}$

c) trajetória para a direita; $R = \dfrac{2J\omega_d v}{(F_B - F_A)\ell}$

17) Um girotacômetro elementar é composto de um giroscópio, cujo quadro é suportado por duas molas fixadas na caixa do aparelho. O momento de inércia do giroscópio em relação ao eixo de rotação própria é igual a ***I*** e sua velocidade angular é ω. Determinar o ângulo α em que girará o eixo do giroscópio juntamente com o quadro, se o aparelho se encontrar instalado sobre uma plataforma que gira à velocidade angular ω_1 em torno do eixo *x*, que é perpendicular ao eixo *y* de rotação do quadro. Os coeficientes de rigidez das molas são iguais a *k*; o ângulo α é considerado pequeno; a distância entre o eixo de rotação do quadro e as molas é igual a *a*.



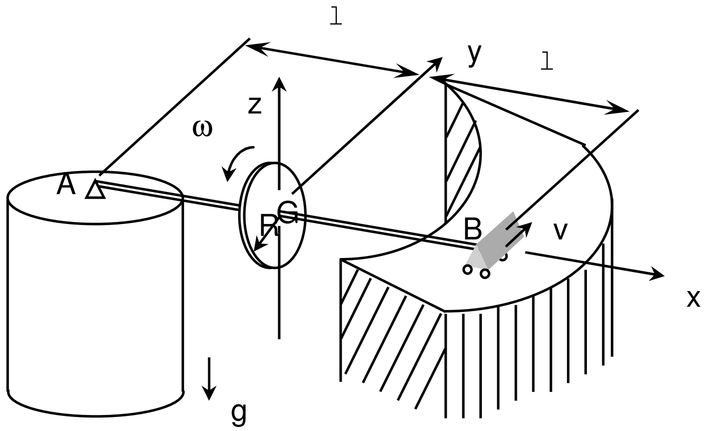
Resp.: $\alpha = \dfrac{J\omega\omega_1}{2ka^2}$

18) O sistema da figura é composto da barra horizontal *AB* de comprimento total 2ℓ e massa desprezível, articulada em *A* e simplesmente apoiada em *B*, e do disco homogêneo de massa *M* e raio *R*, que está em um plano ortogonal à barra *AB*. A barra *AB* passa pelo centro do disco e a distância $\overline{AG}$ é constante e igual a ℓ. O disco gira com velocidade angular constante ω em torno do eixo *Gx* conforme indicado na figura, e o ponto *B* tem velocidade $\vec{v}_B = v\vec{j}$ com *v* constante. Dado $J_{z_G} = MR^2/4$, pede-se:

a) o vetor de rotação absoluto do disco e seu momento angular tomando-se o seu baricentro como pólo;
b) o momento que o disco aplica na barra *AB*;
c) as reações nos vínculos *A* e *B*.

Resp.: a) $\vec{M}_G = -\dfrac{MR^2\omega v}{4\ell}\vec{j}$

c) $Y_A = 0$; $X_A = -\dfrac{Mv^2}{4\ell}$; $Z_A = \dfrac{MR^2 v\omega}{8\ell^2} + \dfrac{Mg}{2}$; $Z_B = -\dfrac{MR^2 v\omega}{8\ell^2} + \dfrac{Mg}{2}$

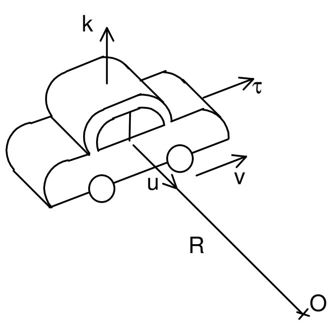


19) Um carro tem motor instalado transversalmente e está fazendo uma curva de raio *R*, com velocidade escalar constante *v*. As partes móveis do motor podem ser representadas dinamicamente por um rotor que gira com vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$, sendo dados J_u, J_τ e J_k sendo $\vec{u}$, $\vec{\tau}$ e $\vec{k}$ os eixos principais de inércia deste rotor. Pede-se, durante a curva mostrada na figura:

a) obter o vetor de rotação absoluto do rotor e o seu momento angular $\vec{K}_G$;

b) obter o momento $\vec{M}_G$ aplicado pelos mancais do rotor a este durante a curva;

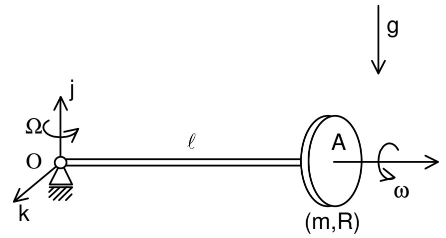
c) neste carro, com o sentido de rotação do rotor como indicado ($\omega > 0$), é maior o perigo de capotamento ao fazer-se curvas para a direita ou para a esquerda? (Justificar).



Resp.: a) $\vec{K}_G = J_u \omega \vec{u} - J_k \dfrac{v}{R} \vec{k}$ b) $\vec{M}_G = -\dfrac{J_u \omega v}{R} \vec{\tau}$

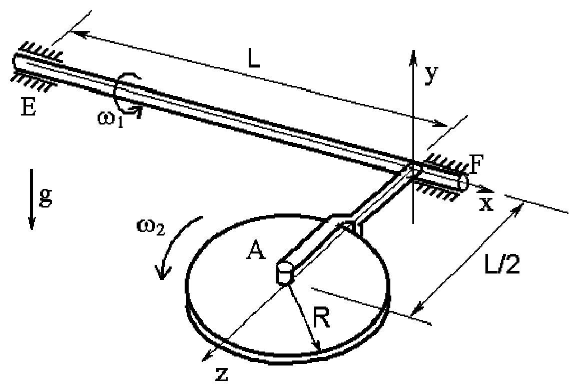
20) A figura mostra um disco homogêneo de raio *R* e peso *mg* acoplado a uma barra de comprimento *L* e massa *2m*. O disco gira com velocidade angular ω constante, em torno da barra *OG*, em relação a esta. A barra OG gira em torno do eixo vertical *y* com velocidade angular Ω constante. O sistema de coordenadas (*O, x, y, z*) é solidário à barra *OG*. Pede-se, expressando as respostas no sistema de coordenadas dado:

a) o vetor de rotação absoluto do disco;
b) o momento angular do disco em relação ao pólo O;
c) o valor de Ω para que o movimento descrito seja possível;
d) os esforços na articulação O.



Resp.: a) $\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{i} + \Omega\vec{j}$ b) $\vec{K}_O = \frac{mR^2}{2}\omega\vec{i} + \left(\frac{mR^2}{4} + m\ell^2\right)\Omega\vec{j}$

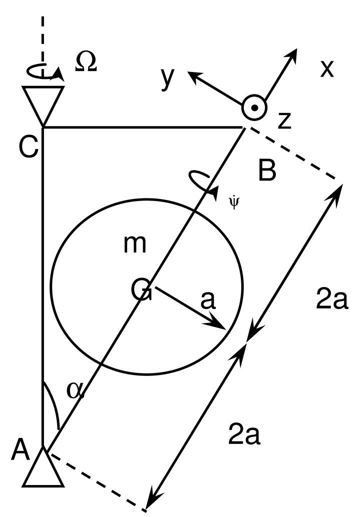
21) Um disco de massa **m** e raio **R** gira com velocidade angular ω_2, constante, em torno do ponto A, como indicado na figura. Neste mesmo instante, a barra AF gira com velocidade angular ω_1, constante, em torno do eixo EF. Pede-se, na posição mostrada na figura (disco no plano xz):



(a) O vetor de rotação absoluto $\vec{\Omega}$ do disco;
(b) O momento que o disco aplica sobre a barra AF;
(c) As reações nos mancais E e F, considerando que as barras AF e EF são homogêneas e têm massas iguais a **2m**.

Resp: a) $\vec{\Omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j}$; b) $\vec{M}_{A,barra} = -2J\omega_1\omega_2\vec{k}$

22) Uma esfera homogênea de raio *a* e massa *m* está presa a uma barra leve de comprimento *4a* A barra forma um ângulo α com a vertical e gira em torno de *AC* com velocidade angular constante $\Omega = \sqrt{g/a}$. A esfera gira em torno da barra com velocidade angular constante $\dot{\psi}$. Utilizando a base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ solidária à barra, pede-se:

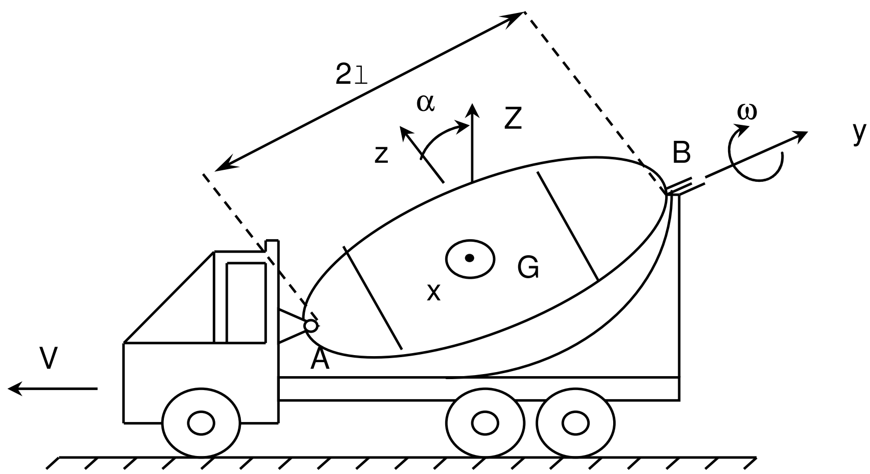


a) o vetor de rotação da esfera e a energia cinética T;
b) aplique o TMA e determine a tração F na corda *BC*;
c) a velocidade angular $\dot{\psi}$ (módulo e sentido) para que a tração F se anule;
d) comparar a energia cinética da situação em que F=0 com aquela em que $\dot{\psi} = 0$ (use $\alpha = 30°$).

Dado: Momento de inércia de esfera $I_X = \frac{2}{5}ma^2$.

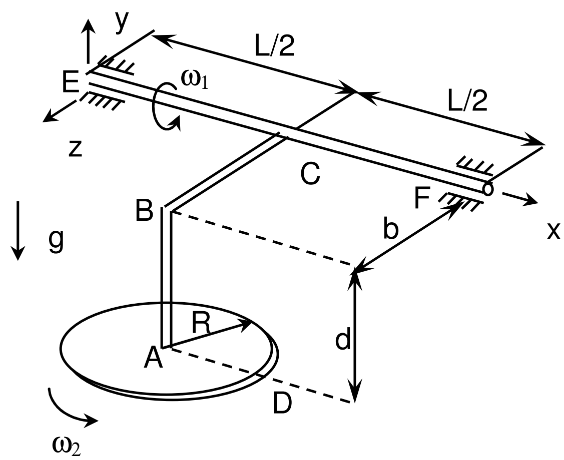
23) Um caminhão betoneira avança com velocidade V constante, ao longo de uma estrada plana, em um trecho com raio de curvatura constante R, para a esquerda. A betoneira (vazia) gira em torno de seu eixo Gy com velocidade angular ω, constante, conforme indicado na figura. São conhecidos a massa M da betoneira e seus momentos de inércia no sistema Gxyz: $I_x = I_z = 2J$ e $Iy = J$. Pede-se:

a) o vetor de rotação absoluto, $\vec{\omega}_G$ e o vetor momento angular da betoneira $\vec{K}_G$;
b) aplicar o TMA à betoneira, em relação ao seu centro de massa G;
c) determinar as componentes Ax, Ay, Az, Bx, By, Bz das reações vinculares aplicadas à betoneira. (A é uma articulação e B é um anel) $\overline{AB} = 2\ell$.



24) O disco (A, R) gira com velocidade angular ω_2 constante em relação à barra ABC. Este gira com velocidade ω_1 constante em torno do eixo EF. Pede-se, na posição mostrada na figura (AD // EF):

a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\Omega}$ do disco;
b) o vetor aceleração rotacional absoluta $\dot{\vec{\Omega}}$ do disco;
c) as reações nos mancais E e F, sendo a massa do disco m e desprezando a massa das demais partes.

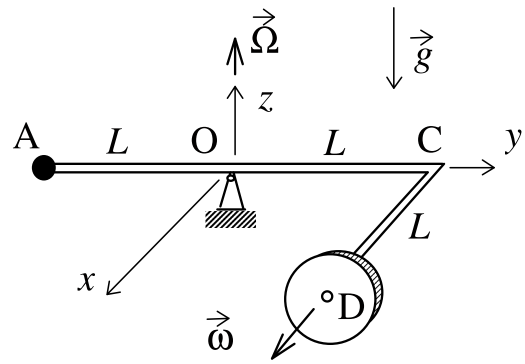


Resp.: b) $\dot{\vec{\Omega}} = \omega_1 \omega_2 \vec{k}$

c) $Y_E = \frac{1}{2}\left(m\omega_1^2 d - \frac{mR^2}{L}\omega_1\, \omega_2 + mg \right)$

$Y_F = \frac{1}{2}\left(m\omega_1^2 d + \frac{mR^2}{L}\omega_1\, \omega_2 + mg \right)$; $Z_E = Z_F = -\frac{m\omega_1^2 b}{2}$

25) O sistema da figura é composto pela barra AOCD de massa desprezível, pela esfera A de massa concentrada *m* e pelo disco D de massa *M* e raio *R*. A barra gira ao redor do eixo vertical que passa pela articulação O, com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$ constante, e o disco gira ao redor do trecho CD da barra com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$ de módulo constante. O sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) é solidário à barra. Pede-se:



a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_{abs}$ do disco;
b) a relação entre Ω e ω e a relação entre as massas *m* e *M* para que o movimento seja possível;
c) as reações na articulação O.

Dado: para o disco $J_D = \frac{1}{2} MR^2$

Resp.: a) $\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{i} + \Omega\vec{k}$ b) $\Omega = \frac{2gL}{R^2\omega}$ e m=M c) $X_O = -M\Omega^2 L$, $Y_O = 0$ e $Z_O = (m + M)g$

Problemas do Beer & Johnston "Mecânica Vetorial para Engenheiros - Cinemática e Dinâmica", 5ª edição, Capítulo 18, Dinâmica dos Corpos Rígidos em Movimento Tridimensional:

(18.56, 18.59)	
(18.60, 18.61)	
18.68	
18.72	Efeito giroscópico
(18.74-18.76-18.77)	Efeito giroscópico
18.80	Efeito giroscópico
18.82	Efeito giroscópico - Ângulos de Euler
18.84	Efeito giroscópico - Ângulos de Euler
18.86	Efeito giroscópico - Ângulos de Euler

(Problemas entre parênteses têm enunciados complementares e podem ser resolvidos conjuntamente).