ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA II – PME 3200 – Prova Recuperação – 18 de Julho de 2023

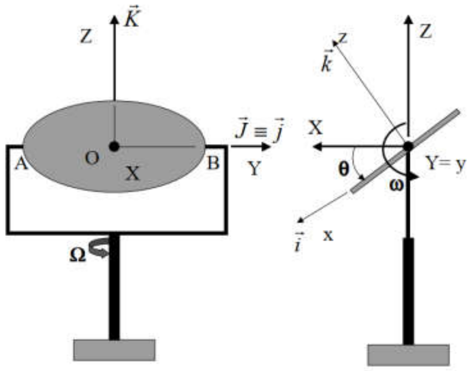
Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)

1ª Questão (3,0 pontos) Um disco homogêneo, de massa M e raio R, que pode girar em torno do eixo AB, com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\,\vec{j}$. O garfo está preso a um eixo vertical que gira com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\vec{K}$. O sistema de eixos $OXYZ$ é solidário ao garfo girante. O sistema de eixos $Oxyz$ é solidário ao disco. O eixo OY coincide com o eixo Oy. Pede-se:

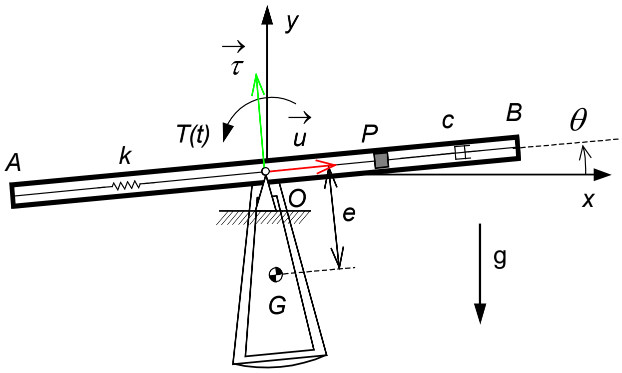
a) Monte a matriz de inércia do disco, em relação ao sistema de eixos $Oxyz$.

b) Determine o vetor de rotação do disco $\vec{\omega}_D$, expressando-o na base ($\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}$) solidária a $Oxyz$, em uma posição genérica, definida pelo ângulo θ .

c) Calcule a energia cinética T do disco em relação à base fixa ao chão, em uma posição genérica, definida pelo ângulo θ .



2ª Questão (3,5 pontos) O balancim de massa M e momento de inércia J_{Oz}, tem movimento angular $\theta(t)$ em torno da articulação ideal em O fixo. O centro de massa G do balancim dista e do ponto O. Uma partícula P, de massa m, desliza sem atrito dentro da guia AB, com posição definida pela cota $\boldsymbol{u}$, medida ao longo da guia, a partir do ponto O. A partícula está ligada a uma mola de rigidez k e a um amortecedor com coeficiente c. A mola está em seu comprimento livre quando a partícula tem posição coincidente com O. Um torque externo oscilatório $T(t) = T_o \cos(\Omega t)$ atua no balancim. Considerando as coordenadas generalizadas $q_1 = u$ e $q_2 = \theta$, pede-se:



a) Escreva a função de Energia Potencial do sistema em função de u e θ e dos parâmetros m, k, g, e M;

b) Escreva a função dissipação *Rayleighiana* (R) do sistema em função de $\dot{u}$ e $\dot{\theta}$ e dos parâmetros do sistema;

c) Escreva a função a Energia Cinética do sistema em função de $\dot{u}$ e $\dot{\theta}$ e dos parâmetros m e J_{Oz};

d) Escreva a expressão da força generalizada $Q(\theta)$;

e) Deduza as equações de movimento utilizando as Equações de *Lagrange*.

3ª Questão (3,5 pontos) Duas barras homogêneas AB e BC de comprimento $2L$ e massa m, podem se movimentar sobre um plano horizontal sem atrito. O ponto B da barra AB, que tem velocidade de translação $\vec{V}_{G1} = V_{G1}\,\vec{i}$, colide com o ponto B da barra BC, que está totalmente imóvel, de maneira **perfeitamente plástica** ($\boldsymbol{e}$ = 0). Pede-se:

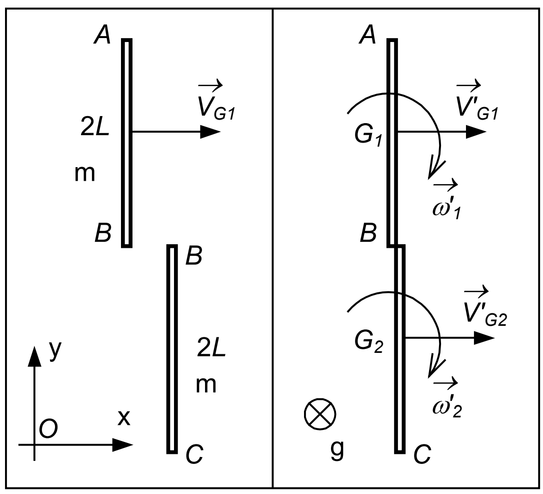
a) Faça o diagrama dos Impulsos dos corpos;

b) Utilizando os teoremas de colisão deduza as equações a eles associadas;

c) Determine a expressão do impulso $\boldsymbol{I}$ na colisão.

d) Considerando as barras idênticas, determine as velocidades $\vec{V}'_{G1}$ e $\vec{V}'_{G2}$ dos centros de massa das barras, posteriores à colisão;

e) Determine as velocidades angulares $\vec{\omega}'_1$ e $\vec{\omega}'_2$ das barras posteriores à colisão;



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 1ª Questão (3,0 pontos) Pontuação: item a) (1,0) ; b) (1,0) ; c) (1,0)

a) Sejam I os momentos de inércia diametrais e J o momento de inércia polar em relação aos eixos (Ox,y,z). Então $I=\frac{1}{4}MR^2$ e $J=\frac{1}{2}MR^2$. Assim a matriz de inércia fica dada por:

$$[J]_{Oxyz}=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

b) O vetor de rotação absoluto do disco é dado por:

$$\vec{\omega}_D=-\Omega\sin\theta\vec{i}+\omega\vec{j}+\Omega\cos\theta\vec{k}$$

c) Como o centro de massa é um ponto fixo a energia cinética do disco fica reduzida à parcela associada à rotação. Assim:

$$T=\frac{1}{2}\{\omega\}^T[J]\{\omega\}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\Omega\sin\theta & \omega & \Omega\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\Omega\sin\theta \\ \omega \\ \Omega\cos\theta\end{bmatrix}$$

e portanto,

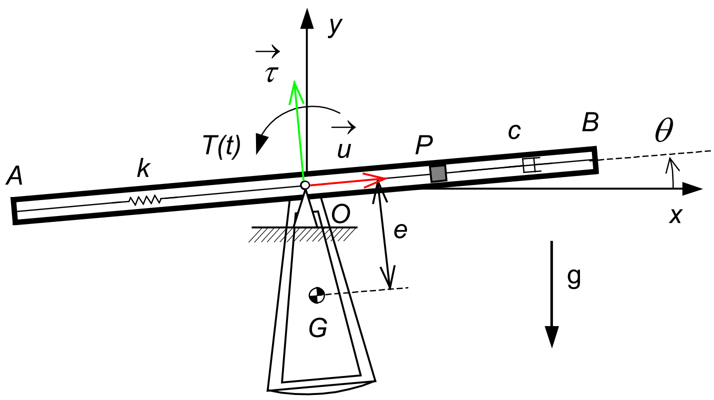
$$\boxed{T=\frac{1}{2}\{I\Omega^2\sin^2\theta+I\omega^2+J\Omega^2\cos^2\theta\}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª Questão (3,5 pontos)



O balancim de massa M e momento de inércia J_{Oz}, tem movimento angular $\theta(t)$ em torno da articulação ideal em O fixo. O centro de massa G do balancim dista e do ponto O. Uma partícula P, de massa m, desliza sem atrito dentro da guia AB, com posição definida pela cota $\boldsymbol{u}$, medida ao longo da guia, a partir do ponto O. A partícula está ligada a uma mola de rigidez k e a um amortecedor com coeficiente c. A mola está em seu comprimento livre quando a partícula tem posição coincidente com O. Um torque externo oscilatório $T(t)=T_o\cos(\Omega t)$ atua no balancim. Considerando as coordenadas generalizadas $q_1 = u$ e $q_2 = \theta$, pede-se:

a) Escreva a função de Energia Potencial do sistema em função de u e θ e dos parâmetros m, k, g, e M;

A posição P da partícula, adotando a base solidária ao balancim $O\vec{u}\,\vec{\tau}\,\vec{k}$ é: $(P-O)=u\,\vec{u}$ ou

$$(P-O)=u\left(\cos\theta\,\vec{i}+\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}\right):$$

$$V = V_{Particula} + V_{mola} + V_{Balancim}$$

$$V_{Part} = mg\cdot h = mg\,u\operatorname{sen}\theta$$

$$V_{mola} = \frac{1}{2}k\left(u-u_O\right)^2 = \frac{1}{2}k\,u^2$$

$$V_{Balancim} = Mg\cdot e\left(1-\cos\theta\right)$$

A Energia Potencial total do sistema resulta em:

$$\boxed{V = mg\,u\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}k\,u^2 + Mg\,e\left(1-\cos\theta\right)}$$ (0,5)

b) Escreva a função dissipação *Rayleighiana* (R) do sistema em função de $\dot{u}$ e $\dot{\theta}$ e dos parâmetros do sistema;

$$\boxed{R = \frac{1}{2}c\,\dot{u}^2}$$ (0,5)

c) Escreva a função a Energia Cinética do sistema em função de $\dot{u}$ e $\dot{\theta}$ e dos parâmetros m e J_{Oz};

A energia cinética do sistema: $T = T_{Particula} + T_{Balancim}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{V}_{Particula} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{arr}$$
$$\vec{V}_{rel} = \dot{u}\,\vec{u}$$
$$\vec{V}_{arr} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (D - O) = 0 + \dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (u\,\vec{u}) = u\,\dot{\theta}\,\vec{\tau}$$
$$\vec{V}_P = \dot{u}\,\vec{u} + u\,\dot{\theta}\,\vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_P^2 = \dot{u}^2 + u^2\,\dot{\theta}^2$$
$$\boxed{T_{Part} = \frac{1}{2} m \cdot \left(\dot{u}^2 + u^2\,\dot{\theta}^2\right)}$$

Para o balancim, utilizando o referencial móvel $O\vec{u}\,\vec{\tau}\,\vec{k}$ solidário ao conjunto com pólo em ***O***, obtêm-se:

$$\boxed{T_{Balancim} = \frac{1}{2} J_{Oz}\,\dot{\theta}^2}$$

A Energia Cinética total do sistema resulta portanto em:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\,\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\left(mu^2 + J_{Oz}\right)\dot{\theta}^2} \qquad (1{,}0)$$

d) Escreva a expressão da força generalizada $Q(\theta)$; Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W = \sum\left(\vec{F} \cdot \delta\vec{r} + M \cdot \delta\theta\right) = Q(u) \cdot \delta u + Q(\theta) \cdot \delta\theta$$
$$0 + T(t) \cdot \delta\theta = 0 \cdot \delta u + Q(\theta) \cdot \delta\theta \quad \Rightarrow \quad Q(\theta) = T(t)$$
$$\boxed{Q(\theta) = T(t) = T_0 \cos(\Omega t)} \qquad (0{,}5)$$

e) Deduza as equações de movimento utilizando as Equações de *Lagrange*.

Para o primeira coordenada generalizada $\boldsymbol{q_1 = u}$ tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = m\,\dot{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\,\ddot{u}$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial u} = m\,u\,\dot{\theta}^2$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial u} = mg\,\mathrm{sen}\,\theta + k\,u \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = c\,\dot{u}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

$$\boxed{m\ddot{u}+c\dot{u}+ku-mu\dot{\theta}^2+mg\,\mathrm{sen}\,\theta=0}$$ (0,5)

Para a segunda coordenada generalizada $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{\theta}$ obtêm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=\left(mu^2+J_{Oz}\right)\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=\left(mu^2+J_{Oz}\right)\ddot{\theta}+2mu\dot{u}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2}=\frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2}=\frac{\partial V}{\partial \theta}=mg\cdot u\cos\theta+Mg\cdot e\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Finalmente a segunda equação para coordenada generalizada $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{\theta}$ resulta em:

$$\boxed{\left(mu^2+J_{Oz}\right)\ddot{\theta}+2mu\dot{u}\dot{\theta}+mg\cos\theta\, u+Mge\,\mathrm{sen}\,\theta=T_0\cos\left(\Omega t\right)}$$ (0,5)

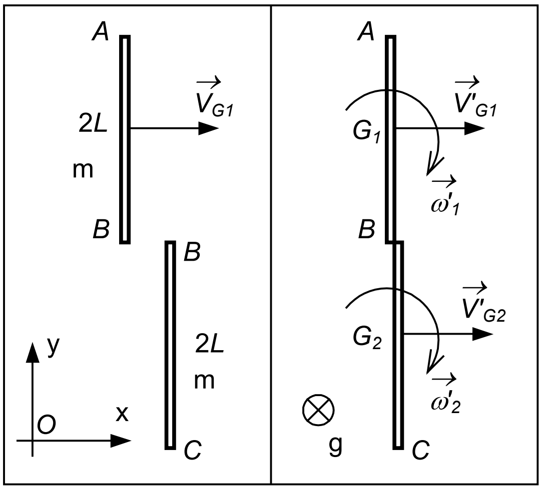
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

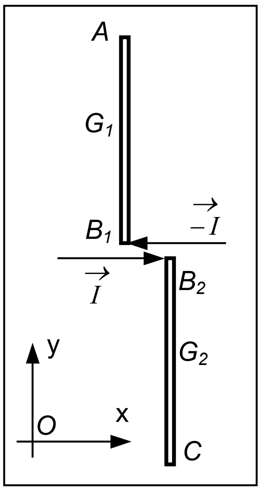
Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3ª Questão (3,5 pontos)

Duas barras homogêneas ***AB*** e ***BC*** de comprimento 2***L*** e massa ***m***, podem se movimentar sobre um plano horizontal sem atrito. O ponto B da barra ***AB***, que tem velocidade de translação $\vec{V}_{G1} = V_{G1}\,\vec{i}$, colide com o ponto *B* da barra ***BC***, que está totalmente imóvel, de maneira **perfeitamente plástica** (***e*** = 0). Pede-se:



a) Faça o diagrama dos Impulsos dos corpos;
b) Utilizando os teoremas de colisão deduza as equações;
c) Determine a expressão do impulso ***I*** na colisão.
d) Considerando as barras idênticas, determine as velocidades $\vec{V}'_{G1}$ e $\vec{V}'_{G2}$ dos centros de massa das barras, posteriores à colisão;
e) Determine as velocidades angulares $\vec{\omega}'_1$ e $\vec{\omega}'_2$ das barras posteriores à colisão;



a) Diagrama dos impulsos dos corpos: (0,5)

b) Utilizando o ***TRI*** pode-se escrever para cada corpo:

$$\begin{aligned} m_1\left(\vec{V}'_{G1} - \vec{V}_{G1}\right) &= -\vec{I} \\ m_2\,\vec{V}'_{G2} &= \vec{I} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\left(\vec{V}'_{G1} - V_{G1}\,\vec{i} + \vec{V}'_{G2}\right) = 0} \qquad (0,5)$$

Utilizando o ***TMI***, considerando o pólo no centro de massa, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} J_{ZG1}\,\omega'_1\,\vec{k} &= (B_1 - G_1)\wedge\left(-I\,\vec{i}\right) = -L\,\vec{j}\wedge\left(-I\,\vec{i}\right) = -LI\,\vec{k} \\ J_{ZG2}\,\omega'_2\vec{k} &= (B_2 - G_2)\wedge I\,\vec{i} = L\,\vec{j}\wedge I\,\vec{i} = -LI\,\vec{k} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{J_{ZG1}\omega'_1 - J_{ZG2}\omega'_2 = 0} \qquad (0,5)$$

Utilizando a expressão do coeficiente de restituição:

$$u' = -e\,u \quad \Rightarrow \quad \left(V'_{B1} - V'_{B2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V'_{B1} = V'_{B2}} \qquad (0,5)$$

Utilizando a fórmula de campo de velocidades e o resultado do coeficiente de restituição:

$$\begin{aligned} \vec{V}'_{B1} &= \vec{V}'_{G1} + \vec{\omega}'_1 \wedge (B_1 - G_1) \\ \vec{V}'_{B2} &= \vec{V}'_{G2} + \vec{\omega}'_2 \wedge (B_2 - G_2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V'_{G1} + L\omega'_1 = V'_{G2} - L\omega'_2} \qquad (0,5)$$

c) Determine o valor do impulso ***I*** na colisão. Aplicando as 4 equações impulsivas na equação cinemática, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & m_1\left(V'_{G1}-V_{G1}\right)=-I \\ & m_2 V'_{G2}=I \\ & J_{ZG1}\,\omega'_1=-LI \\ & J_{ZG2}\,\omega'_2=-LI \\ & V'_{G1}+L\omega'_1=V'_{G2}-L\omega'_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V'_{G1}=V_{G1}-I/m_1 \\ V'_{G2}=I/m_2 \\ \omega'_1=-LI/J_{ZG1} \\ \omega'_2=-LI/J_{ZG2} \end{cases}$$

(0,5)

$$\left(V_{G1}-\frac{I}{m_1}\right)-\frac{L^2 I}{J_{ZG1}}=\frac{I}{m_2}+\frac{L^2 I}{J_{ZG2}}$$

Considerando as barras idênticas, $\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{m}_2$ e $\boldsymbol{J}_{ZC1}=\boldsymbol{J}_{ZC2}=mL^2/12$:

$$V_{G1}-\frac{I}{m}-\frac{L^2 I}{J_{ZG}}=\frac{I}{m}+\frac{L^2 I}{J_{ZG}} \quad \Rightarrow \quad V_{G1}=\frac{2I}{m}+\frac{2L^2 I}{J_{ZG}}=14\frac{I}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I=\frac{mV_{G1}}{14}}$$

(0,5)

d) Substituindo o valor do impulso nas 4 equações, obtêm-se as velocidade translacionais e velocidades angulares após a colisão:

$$\boxed{\begin{aligned} & V'_{G1}=13\frac{I}{m}=\frac{13}{14}V_{G1} \\ & V'_{G2}=\frac{1}{14}V_{G1} \\ & \omega'_1=-\frac{6}{7}\frac{V_{G1}}{L} \\ & \omega'_2=-\frac{6}{7}\frac{V_{G1}}{L} \end{aligned}}$$