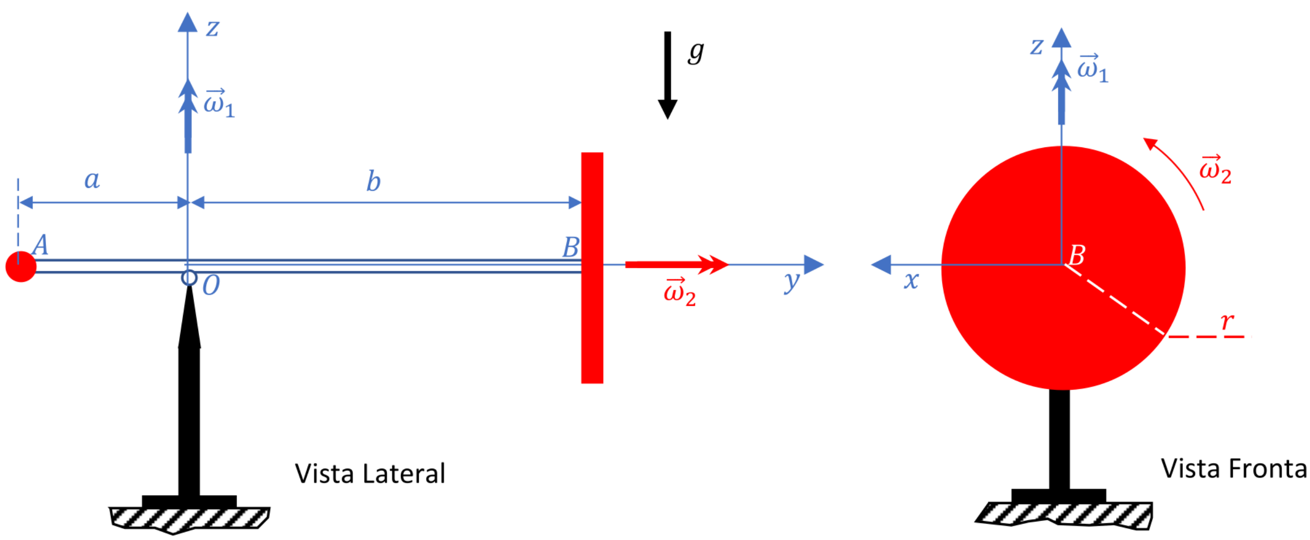
PME 3200 – MECÂNICA II – Prova de Recuperação – 26 de Julho de 2022

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,5 pontos). O disco homogêneo de raio r, massa m e centro de massa B gira com velocidade angular constante $\omega_2\vec{\jmath}$ em torno do eixo AB, na extremidade A do qual localiza-se uma massa concentrada M . O eixo AB, de massa desprezível, está articulado em O e gira com velocidade angular constante $\omega_1\vec{k}$ em torno do eixo fixo Oz. As distâncias $\overline{AO} = a$ e $\overline{OB} = b$ são desconhecidas. Utilizando o sistema de referência Oxyz ligado à barra AB, pede-se determinar:

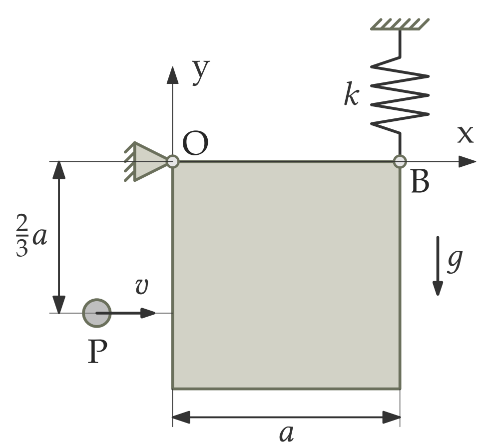
a) a velocidade da massa concentrada M.
b) o vetor rotação absoluta $\vec{\omega}$ do disco.
c) a matriz de inércia do disco no polo O.
d) o momento da quantidade de movimento do sistema {*Disco, Massa Concentrada*} no polo O.
e) a relação entre as distâncias a e b para que o movimento descrito seja possível.



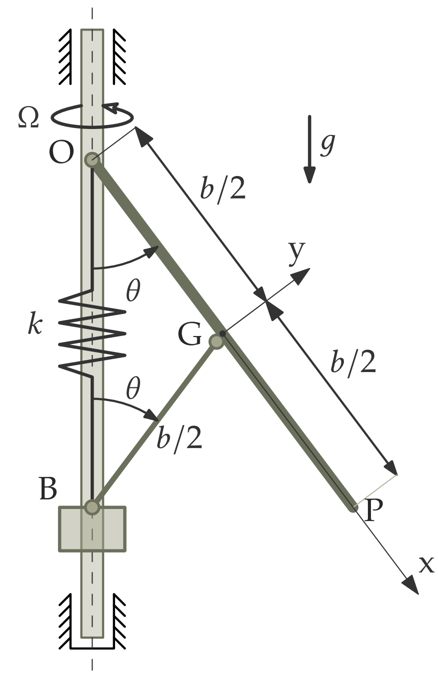
Questão 2 (3,0 pontos). Um pequeno projétil P de massa m é lançado com velocidade $v\vec{\imath}$ contra a lateral de uma placa quadrada homogênea, de lado a e massa $6m$, estando esta articulada em O e inicialmente em repouso. Para o instante imediatamente após a incrustação do projétil na placa, pede-se:

a) desenhar os diagramas de impulsos para o projétil e para a placa;
b) determinar a velocidade angular da placa;
c) determinar as componentes do impulso reativo em O.

Dado: para uma placa quadrada homogênea de massa M e lado L, $J_{Gz} = ML^2/6$.



Questão 3 (3,5 pontos). No sistema ilustrado na, uma barra homogênea OP de massa m e comprimento b está presa por meio de um pino ideal O a um eixo vertical que gira com velocidade angular Ω constante. Devido à presença do pino O, o único movimento relativo possível entre a barra e o eixo vertical é a rotação descrita pelo ângulo θ indicado. O bloco B, por sua vez, tem massa m_B e pode deslizar livremente ao longo do eixo vertical. A vinculação entre o bloco B e o centro de massa G da barra é feita por meio de uma barra rígida biarticulada BG de inércia desprezível e comprimento igual a $b/2$, de tal forma que o triângulo OGB é isósceles. Os pontos O e B são ligados por meio de uma mola linear de constante k e comprimento natural igual a l_0. Despreze quaisquer efeitos dissipativos. Para o sistema ilustrado, pede-se:



a) a expressão da energia cinética do sistema;
b) a expressão da energia potencial do sistema;
c) a equação de movimento do sistema;
c) o valor da coordenada θ quando o sistema opera em regime permanente, com $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$ (considere $0 < \theta < \pi/2$).

Questão 4 – Bônus (1,0 ponto)
a) O que representam fisicamente os autovalores e os autovetores da matriz de inércia de um corpo rígido?
b) Qual a condição para que se possa considerar balanceado um corpo rígido que descreve uma rotação em torno de um eixo fixo?
c) Um pêndulo esférico consiste de uma partícula material de massa constante, em um meio de campo gravitacional constante, e que se encontra vinculada à superfície de uma esfera de centro fixo e raio constante. O vínculo em questão é holônomo ou não-holônomo? Qual o número de graus de liberdade do sistema? Justifique suas respostas.

Questão 1 – Resolução

(a) Velocidade da massa concentrada em A.

Como a massa M é ligada à barra, sua velocidade absoluta é **(0,5)**:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \omega_1\vec{k} \wedge (A - O) = \omega_1\vec{k} \wedge \left(-a\vec{j}\right) = \omega_1 a\vec{i}$$

(b) Vetor rotação absoluta do disco.

No sistema de eixos Oxyz, o vetor rotação instantânea do disco é dado por **(0,5)**:

$$\vec{\omega} = \omega_2\vec{j} + \omega_1\vec{k}$$

(c) Matriz de inércia do disco no polo O .

Expressa no sistema de referência Oxyz, ligado à barra, a matriz de inércia do disco no polo O é dada por **(0,5)**:

$$[J_O] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} b^2 & 0\times b & 0\times 0 \\ 0\times b & 0 & b\times 0 \\ 0\times 0 & b\times 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4}+mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4}+mb^2 \end{bmatrix}$$

(d) Momento da quantidade de movimento no polo O do sistema material $\{Disco, Massa\ concentrada\}$

Expresso no sistema de referência Oxyz, o momento da quantidade de movimento do disco no polo O é dado por:

$$\vec{H}_O^{\text{Disco}} = [J_O]\,[\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4}+mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4}+mb^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{2}\omega_2\vec{j} + \left(\frac{mr^2}{4} + mb^2\right)\omega_1\vec{k}$$

O momento da quantidade de movimento da massa concentrada no polo O é dado por:

$$\vec{H}_O^{\text{massa concentrada}} = (A - O) \wedge M\vec{v}_A = -a\vec{j} \wedge M\omega_1 a\vec{i} = Ma^2\omega_1\vec{k}$$

Portanto, o momento da quantidade de movimento do sistema material $\{Disco, Massa\ concentrada\}$ é dado por **(1,0)**:

$$\vec{H}_O^{\{\text{Disco,Massa}\}} = \frac{mr^2}{2}\omega_2\vec{j} + \left(\frac{mr^2}{4} + mb^2\right)\omega_1\vec{k} + Ma^2\omega_1\vec{k} = \frac{mr^2}{2}\omega_2\vec{j} + \left(\frac{mr^2}{4} + mb^2 + Ma^2\right)\omega_1\vec{k}$$

(e) Relação entre as distâncias a e b que torna o movimento descrito possível.

Aplicando-se ao sistema material $\{Disco,\ Massa\ concentrada\}$ o Teorema do Momento da quantidade de Movimento referido ao polo O e tomando-se como referencial móvel o sistema de eixos

Oxyz ligados à barra (note que, para um observador ligado à barra a matriz de inércia desse sistema é invariante), tem-se:

$$\vec{\mathrm{M}}_O = \frac{d}{\mathrm{dt}} \left. \vec{\mathrm{H}}_O^{\{\mathrm{Disco,Massa}\}} \right|_{\mathrm{OXYZ}} = \frac{d}{\mathrm{dt}} \left. \vec{\mathrm{H}}_O^{\{\mathrm{Disco,Massa}\}} \right|_{\mathrm{Oxyz}} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\mathrm{H}}_O^{\{\mathrm{Disco,Massa}\}}$$

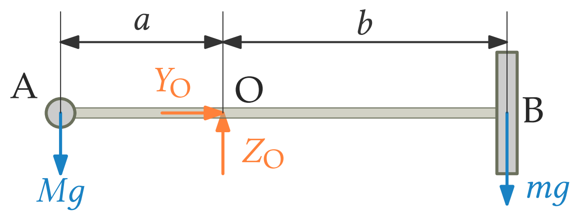
Como ω_1 e ω_2 são constantes:

$$\frac{d}{\mathrm{dt}} \left. \vec{\mathrm{H}}_O^{\{\mathrm{Disco,Massa}\}} \right|_{\mathrm{Oxyz}} = \frac{mr^2}{2}\dot{\omega}_2\vec{\jmath} + \left(\frac{mr^2}{4} + mb^2 + Ma^2\right)\dot{\omega}_1\vec{\mathrm{k}} = \vec{0}$$

De modo que:

$$\vec{\mathrm{M}}_O = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\mathrm{H}}_O^{\{\mathrm{Disco,Massa}\}} = \omega_1\vec{\mathrm{k}} \wedge \left[\frac{mr^2}{2}\omega_2\vec{\jmath} + \left(\frac{mr^2}{4} + mb^2 + Ma^2\right)\omega_1\vec{\mathrm{k}}\right] = -\frac{mr^2}{2}\omega_1\omega_2\vec{\imath}$$

Na expressão acima, $\vec{\mathrm{M}}_O$ corresponde ao momento resultante em O das forças externas aplicadas ao sistema {*Disco, Massa concentrada*}, forças essas que são explicitadas no diagrama de corpo livre ilustrado abaixo.



O momento $\vec{\mathrm{M}}_O$ é dado por:

$$\vec{\mathrm{M}}_O = Mga\vec{\imath} - mgb\vec{\imath} = (Ma - mb)\,g\vec{\imath}$$

Substituindo-se esse resultado na expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, obtém-se:

$$(Ma - mb)\,g = -\frac{mr^2}{2}\omega_1\omega_2$$

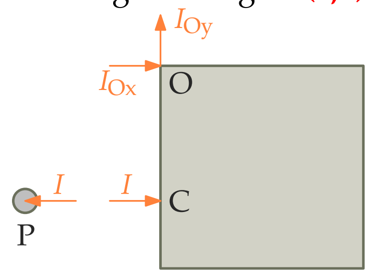
Portanto, para que o movimento descrito seja possível, deve-se ter a seguinte relação entre as distâncias a e b **(1,0)**:

$$a = \frac{m}{M}\left(b - \frac{r^2}{2g}\omega_1\omega_1\right)$$

Questão 2 – Resolução

(a) Diagramas de impulsos.

Esses diagramas são apresentados na figura a seguir **(0,5)**:



(b) Velocidade angular da placa imediatamente após o impacto.

Imediatamente antes do impacto, o momento da quantidade de movimento do sistema {*Placa,Projétil*} no polo O é dado por

$$\vec{H}_O = (C - O) \wedge mv\vec{i} = \left(-\frac{2}{3}a\vec{j}\right) \wedge mv\vec{i} = \frac{2}{3}mav\vec{k}$$

Considerando-se o instante imediatamente após o impacto, notamos que:

(I) o momento da quantidade de movimento da placa se expressa como:

$$\vec{H}'^{\text{Placa}}_O = J_{Oz}\omega'\vec{k} = \left[\frac{(6m)a^2}{6} + (6m)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\omega'\vec{k} = 4ma^2\omega'\vec{k}$$

(II) a velocidade do projétil é dada por:

$$\vec{v}'_C = \vec{v}'_O + \omega'\vec{k} \wedge (C - O) = \vec{0} + \omega'\vec{k} \wedge \left(-\frac{2}{3}a\vec{j}\right) = \frac{2}{3}a\omega'\vec{i}$$

e o seu momento da quantidade de movimento em O é:

$$\vec{H}'^{\{\text{Projétil}\}}_O = (C - O) \wedge m\vec{v}'_C = \left(-\frac{2}{3}a\vec{j}\right) \wedge \left(\frac{2}{3}ma\omega'\vec{i}\right) = \frac{4}{9}ma^2\omega'\vec{k}$$

Portanto, imediatamente após o impacto, o momento da quantidade de movimento do sistema {*Placa,Projétil*} é dado por:

$$\vec{H}'^{\{\text{Placa,Projétil}\}}_O = \vec{H}'^{\text{Placa}}_O + \vec{H}'^{\{\text{Projétil}\}}_O = \frac{40}{9}ma^2\omega'\vec{k}$$

Aplicando-se o Teorema do Momento dos Impulsos relativamente ao polo O para o sistema {*Placa,Projétil*} e notando-se que o momento impulsivo externo em O é nulo, tem-se:

$$\vec{H}'_O - \vec{H}_O = \vec{0}$$

Assim, resulta que:

$$\frac{40}{9} m a^2 \omega' \vec{k} = \frac{2}{3} m a v \vec{k}$$

ou seja **(1,5)**:

$$\omega' = \frac{3}{20} \frac{v}{a}$$

(c) Imediatamente antes do impacto, a quantidade de movimento do sistema $\{Placa, Proj\ell til\}$ é dada por

$$\vec{Q} = m v \vec{i}$$

Imediatamente após o impacto, tem-se que:

(III) a velocidade do centro de massa da placa é

$$\vec{v}'_G = \vec{v}'_O + \omega' \vec{k} \wedge (G - O) = \vec{0} + \omega' \vec{k} \wedge \left(\frac{a}{2} \vec{i} - \frac{a}{2} \vec{j} \right) = \frac{1}{2} a \omega' (\vec{i} + \vec{j}) = \frac{3}{40} v (\vec{i} + \vec{j})$$

(IV) a velocidade do ponto C em que o projétil se incrusta na placa é:

$$\vec{v}'_C = \frac{2}{3} a \omega' \vec{i} = \frac{1}{10} v \vec{i}$$

(V) A quantidade de movimento do sistema {*Placa*,*Projétil*} é:

$$\vec{Q}' = (6m) \vec{v}'_G + m \vec{v}'_C = \frac{9}{20} m v (\vec{i} + \vec{j}) + \frac{1}{10} m v \vec{i}$$

Aplicando-se o Teorema da Resultante dos Impulsos ao sistema {*Placa*,*Projétil*}, tem-se:

$$\vec{Q}' - \vec{Q} = I_{\mathrm{Ox}} \vec{i} + I_{\mathrm{Oy}} \vec{j}$$

ou seja:

$$\frac{9}{20} m v (\vec{i} + \vec{j}) + \frac{1}{10} m v \vec{i} - m v \vec{i} = I_{\mathrm{Ox}} \vec{i} + I_{\mathrm{Oy}} \vec{j}$$

Da equação vetorial acima, resultam **(1,0)**:

$$I_{\mathrm{Ox}} = -\frac{9}{20} m v$$

$$I_{\mathrm{Oy}} = \frac{9}{20} m v$$

Questão 3 – Resolução

(a) **(1,0)** Como $\vec{\mathrm{v}}_G = \dfrac{b}{2}\left(\dot{\theta}\vec{\jmath} - \Omega \sin\theta \vec{\mathrm{k}}\right)$, $\vec{\omega} = \Omega(-\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) + \dot{\theta}\vec{\mathrm{k}}$ e $|\vec{\mathrm{v}}_B| = |b\dot{\theta}\sin\theta|$:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{2}\right)^2\left[(\dot{\theta})^2 + (\Omega\sin\theta)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{mb^2}{12}\left[(\dot{\theta})^2 + (\Omega\sin\theta)^2\right] + \frac{1}{2}m_B(b\dot{\theta}\sin\theta)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3} + m_B\sin^2\theta\right)b^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mb^2}{3}\Omega^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

(b) **(1,0)** Para a mola $l = b\cos\theta$. Assim:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}k(b\cos\theta - l_0)^2 + mg\left(-\frac{b}{2}\cos\theta\right) + m_B g(-b\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}kb^2\cos^2\theta - \left[kl_0 + \frac{(m+2m_B)g}{2}\right]b\cos\theta + \frac{1}{2}kl_0^2
\end{aligned}$$

(c) **(1,0)** Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} &= \left(\frac{m}{3} + m_B\sin^2\theta\right)b^2\dot{\theta} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \left(\frac{m}{3} + m_B\sin^2\theta\right)b^2\ddot{\theta} + m_B\sin(2\theta)b^2\dot{\theta}^2 \\
\frac{\partial T}{\partial\theta} &= \frac{1}{2}\left(m_B\dot{\theta}^2 + \frac{m}{3}\Omega^2\right)b^2\sin(2\theta) \\
\frac{\partial V}{\partial\theta} &= -\frac{1}{2}kb^2\sin(2\theta) + \left[kl_0 + \left(\frac{m}{2} + m_B\right)g\right]b\sin\theta
\end{aligned}$$

A equação de movimento na coordenada θ é, portanto:

$$\left(\frac{m}{3} + m_B\sin^2\theta\right)b^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\left(m_B\dot{\theta}^2 - \frac{m}{3}\Omega^2 - k\right)b^2\sin(2\theta) + \left[kl_0 + \left(\frac{m}{2} + m_B\right)g\right]b\sin\theta = 0$$

(d) **(0,5)** Tomando $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$, e considerando $\theta > 0$:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{m}{3}\Omega^2 - k\right)b^2\sin\theta\cos\theta + \left[kl_0 + \left(\frac{m}{2} + m_B\right)g\right]b\sin\theta = 0 \\
\Rightarrow\quad &\theta = \arccos\left[\frac{kl_0 + \left(\frac{m}{2} + m_B\right)g}{\frac{m}{3}\Omega^2 b + kb}\right]
\end{aligned}$$

Questão 4 – Resolução

(a) **(0,3)** Os autovalores da matriz de inércia de um corpo rígido correspondem aos momentos prinicipais de inércia deste corpo. Os autovetores, por sua vez, fornecem as componentes, no sistema de coordenadas em que a matriz é originalmente representada, de vetores alinhados com os eixos principais de inércia do corpo.

(b) **(0,3)** Um corpo rígido que descreve uma rotação em torno de eixo fixo estará balanceado se este eixo for um eixo central de inércia do corpo (ou seja, um eixo principal passante pelo centro de massa deste corpo).

(c) **(0,4)** Definindo um sistema de coordenadas cuja origem corresponde ao centro da esfera de raio r descrita, para que uma partícula material esteja vinculada à superfície desta esfera, suas coordenadas cartesianas (x, y, z) devem satisfazer à seguinte equação de restrição:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Como tal equação envolve apenas variáveis que descrevem a configuração do sistema, o vínculo em questão é classificado como *holônomo*. Além disso, dado que as 3 coordenadas cartesianas da partícula estão sujeitas a apenas 1 equação de restrição, então o sistema tem $3 - 1 = 2$ graus de liberdade.