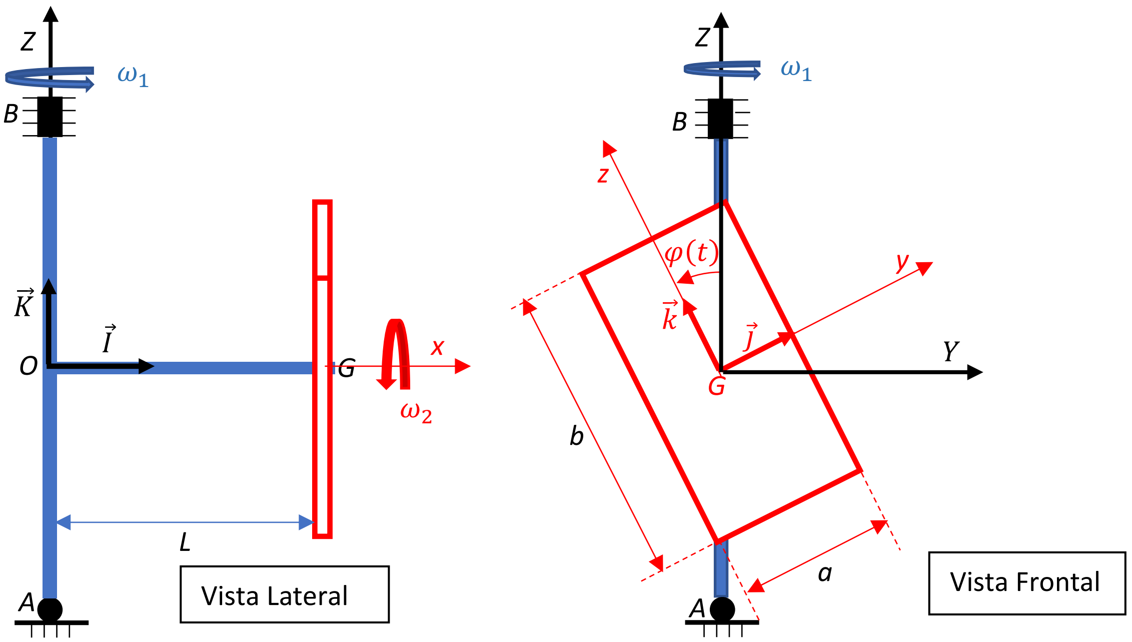
**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**Departamento de Engenharia Mecânica**

**1ª Questão (5,0 pontos).** Uma placa retangular homogênea, de lados *a* e *b* e massa *m*, gira com velocidade angular $\omega_2$ (constante) em relação ao suporte ABOG, o qual, por sua vez, gira em torno do eixo vertical AZ com velocidade angular $\omega_1$ (constante). Utilizando o sistema de eixos Gxyz solidário à placa e a respectiva base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ para descrever as variáveis cinemáticas, as propriedades inerciais de rotação e os esforços aplicados à placa, pede-se:

a. Determinar a matriz de inércia da placa referida ao pólo G.
b. Determinar o vetor rotação absoluta da placa e o vetor aceleração rotacional absoluta da placa.
c. Determinar a aceleração do centro G da placa.
d. Desenhar o diagrama de corpo livre da placa indicando os esforços estáticos e dinâmicos.
e. Escrever a expressão do Teorema da Resultante.
f. Escrever a expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento da placa, adotando G como pólo.
g. Determinar os esforços aplicados pelo suporte à placa.




**RESOLUÇÃO**

A matriz de inércia da placa, referida ao pólo G e descrita no sistema de eixos Gxyz, é:

$$[J_G] = \begin{bmatrix} m\left(\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{b^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{a^2}{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

(½ ponto)

O vetor rotação absoluta do disco é dado por:

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{K} + \omega_2\vec{\imath} \quad (2)$$

Decompondo-se o versor $\vec{K}$ na base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, tem-se:

$$\vec{\omega} = \omega_1\left[\sin\varphi\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}\right] + \omega_2\vec{\imath} = \omega_2\vec{\imath} + \omega_1\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \omega_1\cos\varphi\,\vec{k} \quad (3)$$

(½ ponto)

O vetor aceleração rotacional absoluta da placa é dado por:

$$\dot{\vec{\omega}} = \omega_1 \vec{K} \wedge \omega_2 \vec{\imath} = \omega_1 \vec{K} \wedge \omega_2 \vec{I} = \omega_1 \omega_2 \vec{J} = \omega_1 \omega_2 (\cos\varphi\, \vec{\jmath} - \sin\varphi\, \vec{k}) \qquad (4)$$

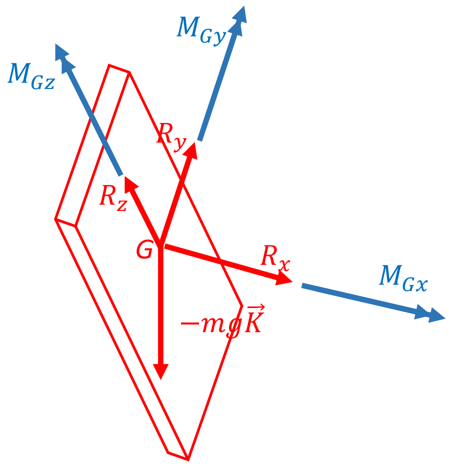
(½ ponto)

A aceleração do centro *G* da placa é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_{suporte} \wedge (G - O) + \vec{\omega}_{suporte} \wedge [\vec{\omega}_{suporte} \wedge (G - O)] = \omega_1 \vec{K} \wedge [\omega_1 \vec{K} \wedge L\vec{\imath}] = -\omega_1^2 L \vec{\imath} \qquad (5)$$

(½ ponto)

Na figura abaixo apresenta-se o diagrama de corpo livre da placa. Utilizou-se vermelho para representar as forças e azul para representar os momentos.




(½ ponto)

O Teorema da Resultante se expressa como

$$-mg(\sin\varphi \vec{\jmath} + \cos\varphi\, \vec{k}) + R_x \vec{\imath} + R_y \vec{\jmath} + R_z \vec{k} = m\vec{a}_G = -m\omega_1^2 L \vec{\imath} \qquad (6)$$

De modo que

$R_x = -mL\omega_1^2$

$R_y = mg \sin\varphi$

$R_z = mg \cos\varphi$

(1 ponto)

O Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, com relação ao pólo G, se expressa como:

$$\vec{M}_G = [J_G]\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \{[J_G]\vec{\omega}\} \qquad (7)$$

Substituindo-se em (7) as expressões (2), (3) e (5), tem-se:

$$\vec{M}_G = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} (a^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1\omega_2 \cos\varphi \\ -\omega_1\omega_2 \sin\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \sin\varphi \\ \omega_1 \cos\varphi \end{bmatrix} \wedge \frac{m}{12}\left\{\begin{bmatrix} (a^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \sin\varphi \\ \omega_1 \cos\varphi \end{bmatrix}\right\} \qquad (8)$$

(1 ponto)

Desenvolvendo-se a expressão acima, chega-se a:

$$\vec{M}_G = \frac{m}{12}\left\{(a^2 - b^2)\,\omega_1^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\vec{\imath} + 2b^2\omega_1\omega_2\cos\varphi\,\vec{\jmath} - 2a^2\omega_1\omega_2\sin\varphi\,\vec{k}\right\} \quad (8)$$

ou seja,

$$M_{Gx} = \frac{m}{12}(a^2 - b^2)\,\omega_1^2 \sin\varphi\cos\varphi$$

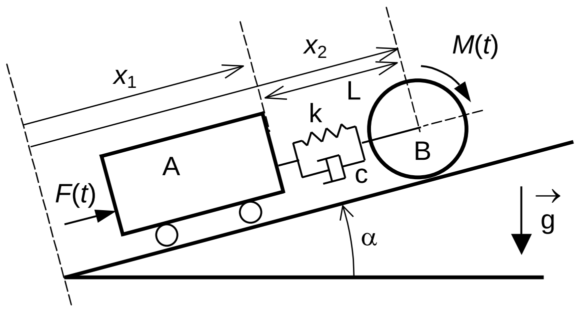
$$M_{Gy} = \frac{m}{6}b^2\omega_1\omega_2\cos\varphi$$

$$M_{Gz} = -\frac{m}{6}a^2\omega_1\omega_2\sin\varphi$$

(½ ponto)

| | |
|---|---|
| | **ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**<br>**Departamento de Engenharia Mecânica** |

**2ª Questão (5,0 pontos).** O bloco ***A*** de massa ***m*** se movimenta sem atrito sobre o plano inclinado submetido a uma força ***F***(t), conforme mostrado na figura. O disco de centro ***B***, homogêneo de massa ***m*** e raio ***R***, está submetido a um momento externo ***M***(t) e rola **sem escorregar** sobre o plano inclinado. O disco está interligado ao bloco por meio de uma mola de rigidez ***k*** e um amortecedor viscoso linear de constante ***c***. Utilizando $x_1$ e $x_2$ como coordenadas generalizadas e considerando a mola com comprimento natural indeformado ***L***, determine:




(a) A energia cinética ***T*** do sistema;
(b) A energia potencial ***V*** do sistema;
(c) A função dissipativa *Rayleighiana* ***R***;
(d) As forças generalizadas $Q_1$ e $Q_2$;
(e) As equações de movimento para as coordenada generalizadas $x_1$ e $x_2$, deduzindo-as utilizando a equação de *Lagrange*. Expresse-as também na forma matricial.

## Resolução:

a) A energia cinética ***T*** do sistema. $T = T_A + T_B$ onde o bloco ***A*** apenas translada e devido a condição de corpo rígido do disco ***B***, rolando sem escorregar: $x_2 = R\theta$ e sabendo que o momento de inércia é: $J_{Bz} = \frac{1}{2}mR^2$ obtêm-se para $T = \frac{1}{2}mV_O^2 + m\vec{V}_O \cdot [\vec{\omega} \wedge (G - O)] + \frac{1}{2}\{\vec{\omega}\}^T [J]_O \{\vec{\omega}\}$

$$T_A = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2;$$

$$T_B = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_{B,z}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_{B,z}\frac{\dot{x}_2^2}{R^2}; \quad \Rightarrow \quad T_B = \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2; \qquad (1,0)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \frac{3}{2}\dot{x}_2^2\right)$$

b) A energia potencial ***V*** do sistema, considerando a ação gravitacional e a mola com comprimento natural indeformado ***L***, na posição indicada:

$$V = V_{peso} + V_{mola};$$

$$V_{peso} = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha(x_1 + x_2)$$

$$V_{mola} = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - L)^2 \qquad (0,5)$$

$$V = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha(x_1 + x_2) + \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - L)^2$$

(c) A função dissipativa *Rayleighiana* ***R***.

$$R = \frac{c}{2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2; \qquad (0,5)$$

d) As forças generalizadas $\boldsymbol{Q}_1$ e $\boldsymbol{Q}_2$ utilizando o principio dos trabalhos virtuais e lembrando que $x_2 = R\theta \Rightarrow \delta x_2 = R \cdot \delta \theta$ resulta em:

$$\delta W_{Ordinário} = \delta W_{Generalizado}$$

$$\delta W_F = \vec{F} \cdot \delta x_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 \quad \rightarrow \quad Q_1 = F; \qquad (1,0)$$

$$\delta W_M = M \cdot \delta \theta = \frac{M}{R} \cdot \delta x_2 = Q_2 \cdot \delta q_2 \quad \rightarrow \quad Q_2 = \frac{M}{R};$$

e) A equação de *Lagrange* é obtida de:

$$L = T - V \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_1^2 + \frac{3}{2}\dot{x}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_2 - x_1 - L\right)^2 - mg\,\text{sen}\,\alpha\left(x_2 + x_1\right)$$

A equação de movimento é obtida pelas derivadas parciais e temporais da equação de *Lagrange* para as coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}_i$. Tomando $q_1 = x_1$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad \text{para} \qquad \boldsymbol{i} = 1, 2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{x}_1 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} m\ddot{x}_1;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -mg\,\text{sen}\,\alpha + \frac{k}{2}2(x_2 - x_1 - L);$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{c}{2}2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1);$$

$$m\ddot{x}_1 - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k(x_2 - x_1 - L) + mg\,\text{sen}\,\alpha = F; \qquad (1,0)$$

Para a coordenada $q_2 = x_2$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{3}{2} m\dot{x}_2 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{3}{2} m\ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -mg\,\text{sen}\,\alpha - \frac{k}{2}2(x_2 - x_1 - L);$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = \frac{c}{2}2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1);$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1 - L) + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = M/R;$$

Finalmente expressando na forma matricial obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - kL \\ (M/R) - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha + kL \end{Bmatrix} \qquad (1{,}0)$$

Observa-se o acoplamento entre os movimentos dos corpos, nos termos fora da diagonal principal da matriz de rigidez [***K***].