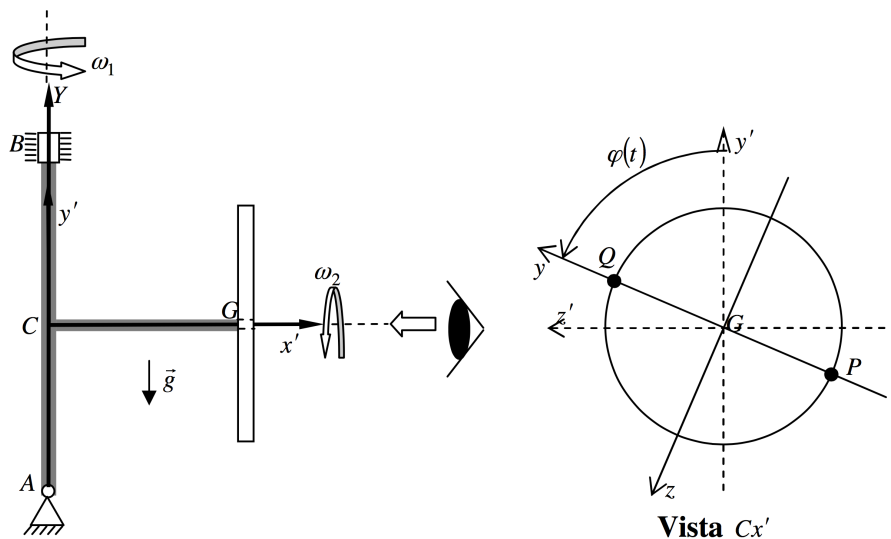




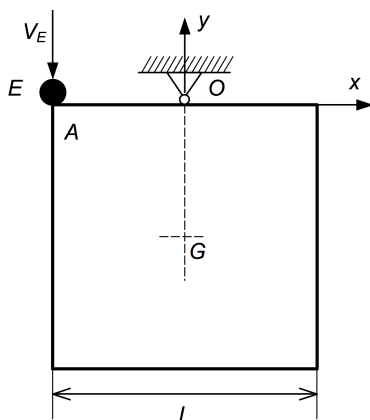
PME 3200 – MECÂNICA II – Prova de Recuperação – 23 de Julho de 2019

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,0 pontos). O suporte $ABCG$, vinculado à articulação A e ao mancal B , gira em torno do eixo vertical fixo Y com velocidade angular ω_1 constante ($\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{j}$). Em G há um mancal em que se vincula um disco de raio r que gira com velocidade angular ω_2 constante ($\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$) em relação ao suporte $ABCG$. O disco compõe-se de uma parcela $100m$ de massa homogeneamente distribuída em toda a sua área, acrescida de duas pequenas massas concentradas de mesmo valor m , localizadas nos pontos P e Q conforme mostrado na figura. A massa do suporte $ABCG$ é desprezível. O sistema de eixos $Cx'y'z'$ é rigidamente ligado ao suporte $ABCG$ e o sistema de eixos $Gxyz$ é rigidamente ligado ao disco. As respectivas bases são $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Pede-se:



- determinar o vetor rotação $\vec{\omega}$ do disco, expressando-o no sistema de eixos $Gxyz$;
- calcular a matriz de inércia do disco no pólo G , expressando-a no sistema de eixos $Gxyz$;
- determinar o momento da quantidade de movimento do disco \vec{H}_G no pólo G .
- determine o binário giroscópico aplicado pelo disco ao suporte $ABCG$.



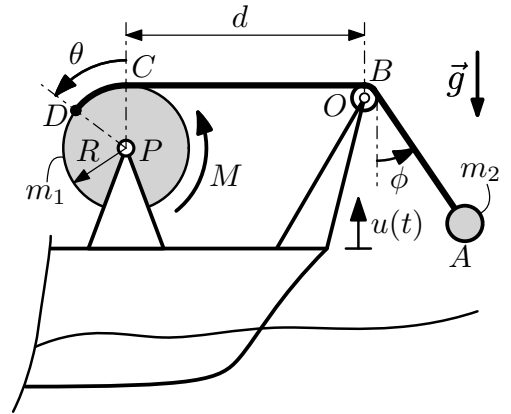
Questão 2 (3,5 pontos). A placa homogênea quadrada de lado L e massa M encontra-se em repouso e se movimenta no plano Oxy suspensa pela articulação em torno de O , conforme mostrado na figura ao lado. Uma pequena esfera E de massa m , com velocidade $\vec{v}_E = -v_E \vec{j}$, colide com a face plana da placa no ponto A , de forma perfeitamente elástica. Pedem-se:

- os diagramas de impulsos dos corpos livres;
- a velocidade angular da placa $\vec{\omega}'$, imediatamente após a colisão;
- o vetor velocidade \vec{v}'_G do centro de massa da placa, logo após a colisão;
- o impulso reativo \vec{I}_O na articulação O .

Dado: momento de inércia da placa $J_{Gz} = \frac{1}{6}ML^2$



Questão 3 (3,5 pontos). A figura ao lado ilustra um sistema de içamento montado sobre um navio. Uma carga de massa m_2 e dimensões desprezíveis encontra-se presa à extremidade A do cabo $ABCD$, suposto inextensível, de comprimento total l e de massa desprezível. O trecho CD do cabo se enrola sobre a superfície de um carretel de centro P , raio R e massa m_1 , que pode ser modelado como um cilindro homogêneo. Este carretel é acionado por um torque M fornecido por um motor. Admita que o navio tem inércia muito maior que a do sistema de içamento, de tal forma que o movimento do mesmo está restrito, durante a operação do sistema, a uma translação vertical descrita por uma função $u(t)$ conhecida. Despreze as dimensões da polia de centro O . Adote como coordenadas generalizadas os ângulos θ e ϕ indicados, considerando que, durante a operação do sistema, os valores destes ângulos permaneçam em intervalos em que não haja a possibilidade de colisão da carga com qualquer parte do navio. Pede-se:



- as expressões da energia cinética (T) e potencial (V) do sistema;
- as equações de movimento do sistema nas coordenadas θ e ϕ , deduzidas a partir do formalismo de Lagrange.
- as expressões das equações de movimento na forma de espaço de estados $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, adotando como vetor de estados $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T = [\theta \ \phi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$.

**Resolução da Questão 1 (3,0 pontos)**

a) O vetor rotação absoluto do disco, expresso no sistema de eixos $Gxyz$ é:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{i} = \omega_2 \vec{i} + \omega_1 \cos \phi \vec{j} - \omega_1 \sin \phi \vec{k} \quad (0,5)$$

b) Os momentos de inércia do disco são:

$$J_{Gx} = \frac{100mr^2}{2} + 2mr^2 = 52mr^2, \quad J_{Gy} = \frac{100mr^2}{4} = 25mr^2, \quad J_{Gz} = \frac{100mr^2}{4} + 2mr^2 = 27mr^2$$

Os produtos de inércia do disco são:

$$J_{Gxy} = 0, \quad J_{Gxz} = 0, \quad J_{Gyz} = 0$$

Portanto, a matriz de inércia do disco, no pólo G , descrita no sistema de eixos $Gxyz$, é:

$$[J]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} 52mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 25mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 27mr^2 \end{bmatrix} \quad (1,0)$$

c) O momento da quantidade de movimento no pólo G do disco é:

$$\vec{H}_G = [J]_{Gxyz} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 52mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 25mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 27mr^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \cos \phi \\ -\omega_1 \sin \phi \end{bmatrix} = mr^2 \left(52\omega_2 \vec{i} + 25\omega_1 \cos \phi \vec{j} - 27\omega_1 \sin \phi \vec{k} \right) \quad (0,5)$$

d) Para determinar o binário giroscópico aplicado pelo suporte $ABCG$ ao disco, aplicamos o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento ao disco, ou seja:

$$\vec{M}_G = [J]_{Gxyz} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \{ [J]_{Gxyz} \vec{\omega} \}$$

em que o vetor aceleração rotacional $\dot{\vec{\omega}}$ é dado por:

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_{\text{rel}} + \dot{\vec{\omega}}_{\text{arr}} + \vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge \vec{\omega}_{\text{rel}} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{j} \wedge \omega_2 \vec{i} = (\omega_1 \cos \phi \vec{j} - \omega_1 \sin \phi \vec{k}) \wedge \omega_2 \vec{i} = -\omega_1 \omega_2 (\cos \phi \vec{k} + \sin \phi \vec{j})$$

e \vec{M}_G é o binário giroscópico ativo aplicado ao disco pelo suporte $ABCG$. Fazendo-se as devidas substituições, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= \begin{bmatrix} 52mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 25mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 27mr^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_1 \omega_2 \sin \phi \\ -\omega_1 \omega_2 \cos \phi \end{bmatrix} + mr^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_2 & \omega_1 \cos \phi & -\omega_1 \sin \phi \\ 52\omega_2 & 25\omega_1 \cos \phi & -27\omega_1 \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= -25mr^2 \omega_1 \omega_2 \sin \phi \vec{j} - 27mr^2 \omega_1 \omega_2 \cos \phi \vec{k} + mr^2 \left[-2\omega_1^2 \sin \phi \cos \phi \vec{i} - 25\omega_1 \omega_2 \sin \phi \vec{j} - 27\omega_1 \omega_2 \cos \phi \vec{k} \right] \\ &= mr^2 \left(-2\omega_1^2 \sin \phi \cos \phi \vec{i} - 50\omega_1 \omega_2 \sin \phi \vec{j} - 54\omega_1 \omega_2 \cos \phi \vec{k} \right) \end{aligned}$$

Portanto, o binário giroscópico reativo, aplicado pelo disco ao suporte, é:

$$\vec{M}'_G = mr^2 \left(2\omega_1^2 \sin \phi \cos \phi \vec{i} + 50\omega_1 \omega_2 \sin \phi \vec{j} + 54\omega_1 \omega_2 \cos \phi \vec{k} \right) \quad (1,0)$$

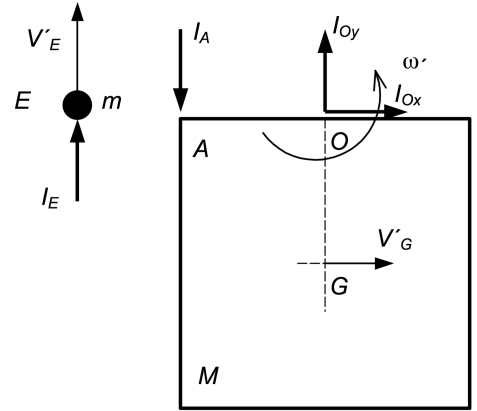


Resolução da Questão 2 (3,5 pontos)

a) os diagramas de impulsos dos corpos livres (figura ao lado). **(0,5)**

b) a velocidade angular da placa ω' , imediatamente após a colisão. Aplicando o Teorema da Resultante dos Impulso (TRI) na esfera E com velocidade $\vec{v}_E = -v_E \vec{j}$ anterior à colisão:

$$\begin{aligned}
 m\Delta\vec{v}_E = \vec{I}_E &\Rightarrow m(\vec{v}'_E - \vec{v}_E) = I_E \vec{j} \quad \text{com} \quad \vec{v}_E = -v_E \vec{j} \\
 &\Rightarrow \boxed{m(v'_E + v_E) = I_E} \quad \text{(I)} \quad \mathbf{(0,5)}
 \end{aligned}$$



Aplicando o Teorema do Momento dos Impulso (TMI) na placa com velocidade angular anterior a colisão $\vec{\omega} = 0 \vec{k}$ e considerando o pólo O , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 J_{Oz} \Delta\vec{\omega} = \vec{M}_O^{\text{ext}} &\Rightarrow J_{Oz}(\omega' - \omega) \vec{k} = (A - O) \wedge \vec{I}_A \\
 &\Rightarrow J_{Oz} \omega' \vec{k} = \left(-\frac{L}{2}\right) \vec{i} \wedge (-I_A) \vec{j} \\
 &\Rightarrow \boxed{\frac{2}{L} J_{Oz} \omega' = I_A} \quad \text{(II)} \quad \mathbf{(0,5)}
 \end{aligned}$$

Considerando que $I_E = I_A$ e comparando as duas expressões anteriores (II) e (I):

$$\boxed{\frac{2}{L} J_{Oz} \omega' = m(v'_E + v_E)} \quad \text{(III)}$$

Utilizando a expressão de restituição de *Newton*, para colisão perfeitamente elástica ($e = 1$):

$$\begin{aligned}
 u' = -e \cdot u &\Rightarrow (\vec{v}'_E - \vec{v}'_A) \cdot \vec{j} = -e (\vec{v}_E - \vec{v}_A) \cdot \vec{j} \\
 &\Rightarrow (v'_E - v'_A) = -1 \cdot (-v_E - 0) = v_E \\
 &\Rightarrow \boxed{v'_E = v_E + v'_A} \quad \text{(IV)} \quad \mathbf{(0,5)}
 \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de campo de velocidades para a placa rígida:

$$\vec{v}'_A = \vec{v}'_O + \vec{\omega}' \wedge (A - O) \Rightarrow \vec{v}'_A = \vec{0} + \omega' \vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2} \vec{i}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}'_A = -\frac{L\omega'}{2} \vec{j}} \quad \text{(V)}$$

O momento de inércia no polo O pode ser calculado utilizando a fórmula de mudança de polo para eixos paralelos:

$$J_{Oz} = J_{Gz} + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{J_{Oz} = \frac{5}{12} ML^2} \quad \text{(VI)}$$

Utilizando as expressões (IV), (V) e (VI) em (III), obtém-se:

$$\omega' = \frac{2m}{L \left(\frac{5M}{6} + \frac{m}{2}\right)} v_E \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}' = \frac{12m}{L(5M + 3m)} v_E \vec{k}} \quad \text{(VII)} \quad \mathbf{(0,5)}$$



c) o vetor velocidade \vec{v}'_G do centro de massa da placa, logo após a colisão é obtido novamente pela aplicação da fórmula de campo de velocidades:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_G &= \vec{v}'_O + \vec{\omega}' \wedge (G - O) \Rightarrow \vec{v}'_G = 0 + \frac{12m}{L(5M + 3m)} v_E \vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2} \right) \vec{j} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{v}'_G = \frac{6m}{(5M + 3m)} v_E \vec{i}} \quad \text{(VIII) (0,5)}\end{aligned}$$

d) o impulso reativo \vec{I}_O na articulação O . Aplicando o TRI na placa e utilizando as expressões (VIII), (VI) e (II):

$$\begin{aligned}m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) &= -I_A \vec{j} + I_{Ox} \vec{i} + I_{Oy} \vec{j} \Rightarrow m \frac{12m}{(10M + 6m)} v_E \vec{i} = -\frac{2}{L} J_{Oz} \omega' \vec{j} + I_{Ox} \vec{i} + I_{Oy} \vec{j} \\ \Rightarrow \boxed{I_{Ox} = \frac{6m^2}{(5M + 3m)} v_E} \quad \text{e} \quad I_{Oy} &= \frac{2}{L} J_{Oz} \omega' \Rightarrow \boxed{I_{Oy} = \frac{10Mm}{(5M + 3m)} v_E} \quad \text{(0,5)}\end{aligned}$$



Resolução da Questão 3 (3,5 pontos)

a) A energia cinética do sistema pode ser expressa na forma:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_P^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2v_A^2$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2[(\dot{\phi}(l-d-R\theta) + \dot{u}\sin\phi)^2 + (R\dot{\theta} + \dot{u}\cos\phi)^2]$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{u}^2 + \left(\frac{m_1}{4} + \frac{m_2}{2}\right)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\phi}^2(l-d-R\theta)^2 + m_2\dot{u}[\dot{\phi}(l-d-R\theta)\sin\phi + \dot{\theta}R\cos\phi] \quad (0,6)$$

A energia potencial, por sua vez, pode ser escrita na forma:

$$V = m_1g(u-R) + m_2g[u - (l-d-R\theta)\cos\phi] \quad (0,3)$$

b) Equação de movimento associada à coordenada θ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)R^2\dot{\theta} + m_2\dot{u}R\cos\phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)R^2\ddot{\theta} + m_2\ddot{u}R\cos\phi - m_2\dot{u}\dot{\phi}R\sin\phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m_2\dot{\phi}^2R(l-d-R\theta) - m_2\dot{u}\dot{\phi}R\sin\phi, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = m_2gR\cos\phi, \quad Q_\theta = M$$

$$\boxed{\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)R^2\ddot{\theta} + m_2\dot{\phi}^2R(l-d-R\theta) + m_2(g + \ddot{u})R\cos\phi = M} \quad (1,0)$$

Equação de movimento associada à coordenada ϕ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = Q_\phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m_2\dot{\phi}(l-d-R\theta)^2 + m_2\dot{u}(l-d-R\theta)\sin\phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) = m_2\ddot{\phi}(l-d-R\theta)^2 - 2m_2\dot{\phi}\dot{\theta}R(l-d-R\theta) + m_2\ddot{u}(l-d-R\theta)\sin\phi - m_2\dot{u}\dot{\theta}R\sin\phi + m_2\dot{u}\dot{\phi}(l-d-R\theta)\cos\phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = m_2\dot{u}[\dot{\phi}(l-d-R\theta)\cos\phi - \dot{\theta}R\sin\phi], \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} = m_2g(l-d-R\theta)\sin\phi, \quad Q_\phi = 0$$

$$\boxed{m_2\ddot{\phi}(l-d-R\theta)^2 - 2m_2\dot{\phi}\dot{\theta}R(l-d-R\theta) + m_2(g + \ddot{u})(l-d-R\theta)\sin\phi = 0} \quad (1,0)$$

c) Adotando como vetor de estados $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^\top = [\theta \ \phi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^\top$, tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{2}{(m_1 + 2m_2)R^2} \left(M - m_2y_4^2R(l-d-Ry_1) - m_2(g + \ddot{u}(t))R\cos y_2 \right) \\ \frac{1}{(l-d-Ry_1)} \left(2Ry_3y_4 - (g + \ddot{u}(t))\sin y_2 \right) \end{bmatrix} \quad (0,6)$$