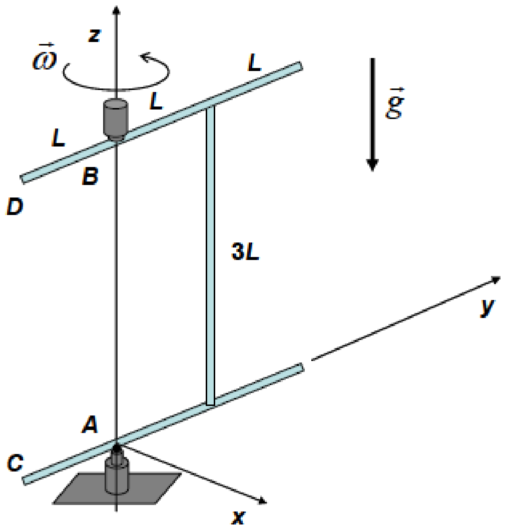
PME 3200 – MECÂNICA II –Prova de Recuperação – 24 de julho de 2018
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

1ª Questão (3 pontos)

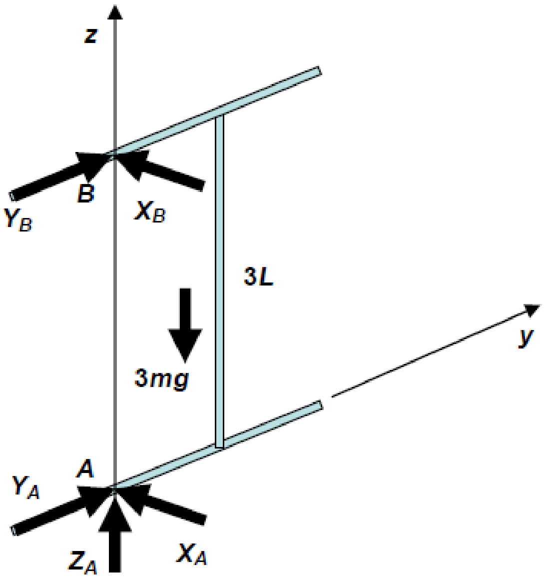


O sistema mostrado na figura, composto por três barras de massa m e comprimento $3L$, gira em torno do eixo Az com rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante. Determine:

a) As reações (X_A, Y_A, Z_A), na articulação A e (X_B, Y_B), no anel B.

b) As massas m_1 e m_2, a serem colocadas nos pontos C e D, respectivamente, necessárias para balancear o sistema.

a) As reações (X_A, Y_A, Z_A), na articulação A e (X_B, Y_B), no anel B.



Posição do baricentro:

$\boxed{x_G = 0}$

$3my_G = mL/2 + mL + mL/2 \Rightarrow \boxed{y_G = 2L/3}$

$\boxed{z_G = 3L/2 \text{ (simetria)}}$

Aceleração do baricentro ($\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante):

$\boxed{\vec{a}_G = -(2L/3)\omega^2\vec{j}}$ (0,5)

TMB:

$-X_A - X_B = 0$

$Y_A + Y_B = 3m\left(-(2L/3)\omega^2\right)$

$\boxed{Z_A = 3mg}$ (0,5)

Momento Angular, pólo A (fixo):

$$\vec{H}_A = [J_A]\{\vec{\omega}\} = -J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_A = -J_{xz}\omega\dot{\vec{i}} - J_{yz}\omega\dot{\vec{j}} + J_z\omega\dot{\vec{k}} = -J_{xz}\omega^2\vec{j} + J_{yz}\omega^2\vec{i}$$

Mas $\boxed{J_{xz} = 0}$; e $J_{yz} = (J_{yz})_{barra1} + (J_{yz})_{barra2} + (J_{yz})_{barra3} = 0 + (0 + m.L.3L/2) + (0 + m.L/2.3L)$

$\Rightarrow \boxed{J_{yz} = 3mL^2}$ e, portanto, $\boxed{\dot{\vec{H}}_A = 3mL^2\omega^2\vec{i}}$ (0,5)

TMA, pólo A (fixo):

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 3mL^2\omega^2 = -Y_B 3L - 3mg.2L/3 \\ 0 = -X_B 3L \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} X_A = X_B = 0 \\ Y_A = 2mg/3 - mL\omega^2 \\ Y_B = -2mg/3 - mL\omega^2 \end{array}} \qquad (0{,}5)$$

b) As massas m_1 e m_2, a serem colocadas nos pontos C e D, respectivamente, necessárias para balancear o sistema:

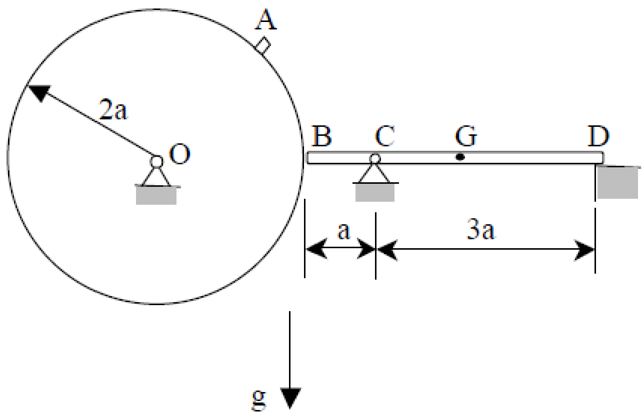
m_1 em $(0,-L,0)$ e m_2 em $(0,-L,3L)$

Baricentro na condição balanceada ($y'_G = 0$): $3m.2L/3 - m_1L - m_2L = 0 \;\Rightarrow\; m_1 + m_2 = 2m$

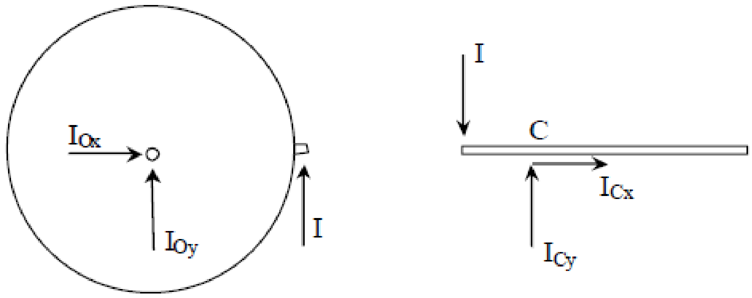
Produtos de inércia na condição balanceada nulos: $J'_{yz} = 0 = 3mL^2 + 0 - 3m_2L^2 \;\Rightarrow\; m_2 = m$

Assim: $\boxed{m_1 = m_2 = m}$. (1,0)

2ª Questão (3,5 pontos) A figura mostra um disco homogêneo de massa *m* e raio 2a que gira em sentido horário em torno de um eixo fixo perpendicular ao plano e passante por O com velocidade angular ω . O ressalto A, de massa desprezível, choca-se com a barra de massa *m* e comprimento 4a, articulada em C e que está inicialmente em repouso. Considerando-se válidas as hipóteses de choque de Newton e conhecendo-se o coeficiente de restituição *e*, pede-se:



a) Os diagramas de corpo livre, do disco e da barra.



(0,5)

b) As velocidades angulares do disco, ω' , e da barra, Ω' , imediatamente após o choque.

Eq. das velocidades relativas: $v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \Rightarrow \Omega' a - \omega' 2a = e\omega 2a$ (eq. 1) **(0,5)**

TMI no disco com pólo em O: $\Delta\vec{H}_O = \int \vec{M}_O \, dt \Rightarrow J_{zO}(-\omega' - (-\omega)) = 2Ia\vec{k}$ (eq. 2) **(0,5)**

TMI na barra com pólo em C: $\Delta\vec{H}_C = \int \vec{M}_C \, dt \Rightarrow J_{zC}\Omega'\vec{k} = Ia\vec{k}$ (eq. 3) **(0,5)**

Substituindo (eq. 2) em (eq. 3):

$$\Rightarrow \frac{4ma^2}{2}\omega - \frac{4ma^2}{2}\omega' = 2\left(\frac{16ma^2}{12} + ma^2\right)\Omega' \quad \Rightarrow \Omega' = \frac{3}{7}(\omega - \omega')$$

Substituindo em (eq. 1):

$$\boxed{\omega' = \frac{(3-14e)}{17}\omega} \quad ➔ \quad \boxed{\Omega' = \frac{6(1+e)}{17}\omega} \quad ➔ \quad \boxed{I = \frac{14ma(1+e)}{17}\omega}$$

(0,5)

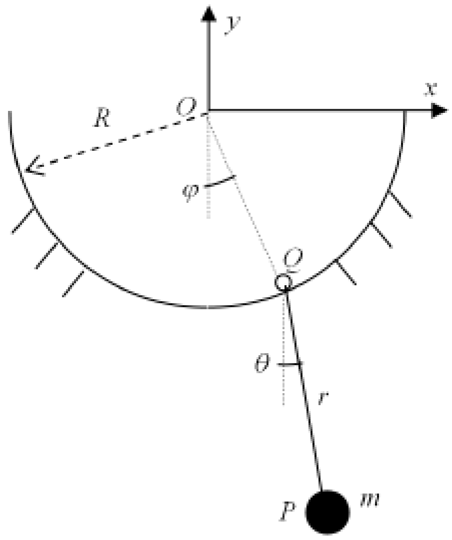
c) O impulso reativo em O.

TI no disco: $\vec{I} = \Delta\vec{Q} = \vec{0} \Rightarrow I_{Oy} = -I$ ➔ $\boxed{I_{Oy} = -\frac{14ma(1+e)}{17}\omega}$ $\boxed{I_{Ox} = 0}$ **(0,5)**

d) O mínimo valor de ω para que a barra venha a se chocar contra o disco.

Para a barra bater no disco o seu baricentro deverá atingir a altura máxima passando pela vertical do ponto C. Pelo TEC: $\Delta T = \tau \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{7ma^2}{3}\right)\Omega'^2 > mga \Rightarrow \Omega'^2 > \frac{6g}{7a}$ ➔ $\boxed{\omega > \frac{17}{6(1+e)}\sqrt{\frac{6g}{7a}}}$ **(0,5)**

3ª Questão (4,5 pontos) Um pino *Q*, de massa desprezível, pode deslizar sem perda de contato sobre uma pista cilíndrica de raio *R*, conforme indica a figura. Uma haste de massa desprezível e comprimento *r* está ligada a *Q* e prende uma pequena esfera de massa *m*, idealizada como uma partícula *P*. A base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orienta o sistema *Oxyz*. Considere a aceleração da gravidade $\vec{g}=-g\vec{j}$ Tomando as variáveis φ e θ como coordenadas generalizadas, pede-se:



a) Escreva a posição de *P* e sua velocidade $\vec{v}$, indicando-as na base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$(P-O)=(R\sin\varphi+r\sin\theta)\vec{i}-(R\cos\varphi+r\cos\theta)\vec{j} \quad , \qquad (0,2) \quad (1)$$

$$\vec{v}=(R\dot{\varphi}\cos\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i}+(R\dot{\varphi}\sin\varphi+r\dot{\theta}\sin\theta)\vec{j} \quad . \qquad (0,3) \quad (2)$$

b) Escreva a expressão da função de energia potencial do sistema.

$$V=mgy=-mg(R\cos\varphi+r\cos\theta) \quad . \qquad (0,5) \quad (3)$$

c) Escreva a expressão da função de energia cinética.
Neste caso,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[(R\dot{\varphi}\cos\varphi+r\dot{\theta}\cos\theta)^2+(R\dot{\varphi}\sin\varphi+r\dot{\theta}\sin\theta)^2\right]= \\ &= \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\theta}^2+2Rr\dot{\varphi}\dot{\theta}(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)\right]= \end{aligned} \quad . \qquad (4)$$

Ou seja,

$$T=\frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\varphi}^2+r^2\dot{\theta}^2+2Rr\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi)\right] \quad . \qquad (0,5) \quad (5)$$

d) Sob dissipação viscosa proporcionada por lubrificação no contato do pino com a pista, que é aqui representada pela função Rayleighiana $\mathcal{R}=\frac{1}{2}\left(C_1\dot{\varphi}^2+C_2\dot{\theta}^2\right);\ C_j>0,\ j=1,2$, deduza as equações de movimento do sistema nas coordenadas φ e θ.

As equações de Lagrange, sob dissipação Rayleighiana, podem ser escritas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}+\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}=0\ ;\quad j=1,2$$

com (0,5) (6)

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}q_1 & q_2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\varphi & \theta\end{bmatrix}^T$$

Assim, com:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=mRr\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)\ ;\quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=-mRr\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m\left(R^2\dot{\varphi}+Rr\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi)\right)\ ;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=m\left(r^2\dot{\theta}+Rr\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=m\left(R^2\ddot{\varphi}+Rr\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)-Rr\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=m\left(r^2\ddot{\theta}+Rr\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)-Rr\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\right)$$

; (0,5) (7)

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=mgR\sin\varphi\ ;\quad \frac{\partial V}{\partial \theta}=mgr\sin\theta\quad .$$ (0,3) (8)

e

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\varphi}}=C_1\dot{\varphi}\ ;\quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}}=C_2\dot{\theta}$$ (0,2) (9)

Segue:

$$m\left(R^2\ddot{\varphi}+Rr\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)-Rr\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\right)-mRr\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)+mgR\sin\varphi+C_1\dot{\varphi}=0$$

e (10)

$$m\left(r^2\ddot{\theta}+Rr\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)-Rr\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi)(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\right)+mRr\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)+mgr\sin\theta+C_2\dot{\theta}=0$$

Que podem ser reescritas:

$$\begin{cases}mR^2\ddot{\varphi}+mRr\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)+C_1\dot{\varphi}-mRr\dot{\theta}^2\sin(\theta-\varphi)+mgR\sin\varphi=0\\ mRr\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)+mr^2\ddot{\theta}+C_2\dot{\theta}+mRr\dot{\varphi}^2\sin(\theta-\varphi)+mgr\sin\theta=0\end{cases}$$ (0,5) (11)

Ou ainda, na forma matricial,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{h}+\mathbf{g}=\mathbf{0}$$

com

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathbf{q})=mR^2\begin{bmatrix}1 & \frac{r}{R}\cos(\theta-\varphi)\\ \frac{r}{R}\cos(\theta-\varphi) & \left(\frac{r}{R}\right)^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}C_1 & 0\\ 0 & C_2\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{h}=\mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=mRr\sin(\theta-\varphi)\begin{bmatrix}-\dot{\theta}^2 & \dot{\varphi}^2\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}(\mathbf{q})=mg\begin{bmatrix}R\sin\varphi & r\sin\theta\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}q_1 & q_2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\varphi & \theta\end{bmatrix}^T$$

e) Determine as posições de equilíbrio do sistema. Discuta sua estabilidade. Justifique sua resposta.

A posição de equilíbrio do sistema advém da condição

$$\frac{\partial V}{\partial q_j}=0\ ;\ j=1,2$$

ou seja . (13)

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=mgR\sin\varphi=0 \ \text{ e } \ \frac{\partial V}{\partial \theta}=mgr\sin\theta=0$$

A qual, no presente caso, conduz às seguintes possibilidades físicas (com, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$):

$$\bar{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}0 & k\pi\end{bmatrix}\ ;\ \ k\in\mathbb{Z}\ . \qquad (0{,}5) \tag{14}$$

As posições de equilíbrio com k par são estáveis, uma vez que nesses pontos a matriz Hessiana, $\mathbf{K}=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]$, é definida positiva. Já aquelas correspondentes a k ímpar são instáveis. De fato:

$$\mathbf{K}=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]=mg\begin{bmatrix}R\cos\varphi & 0\\ 0 & r\cos\theta\end{bmatrix}\ , \tag{15}$$

que nos pontos de equilíbrio fica:

$$\mathbf{K}(\bar{\mathbf{q}})=mg\begin{bmatrix}R & 0\\ 0 & (-1)^k r\end{bmatrix}\ ;\ \ k\in\mathbb{Z} \qquad (0{,}5) \tag{16}$$

As posições de equilíbrio estáveis são, na realidade, assintoticamente estáveis, pois a matriz de amortecimento **C** é definida positiva.