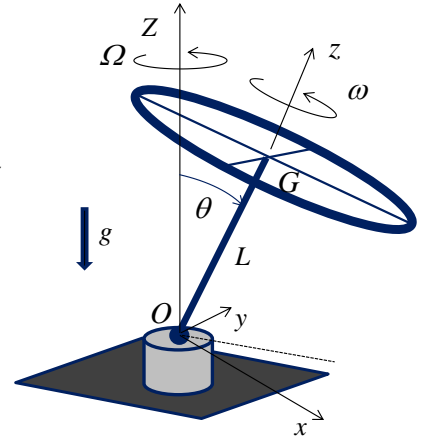




MECÂNICA II - PME 3200 – Prova de Recuperação – 27 de julho de 2017
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)

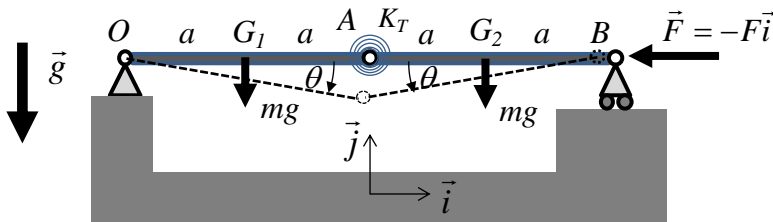
1ª Questão (3,0 pontos).

O anel homogêneo (de espessura desprezível), de massa m e raio R gira ao redor da barra OG , de massa desprezível e comprimento L , com velocidade angular a ela relativa (i.e., de rotação própria) constante, ω . Sabe-se que este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo θ e taxa de precessão Ω , ambos constantes e considerados conhecidos. O sistema $Oxyz$ acompanha a barra OG , com Oy sempre horizontal. Os eixos Ox , Oy , Oz e OZ são orientados respectivamente pelos versores, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} e \vec{K} . Nesta situação de equilíbrio dinâmico, determine:



- a) a velocidade angular de rotação própria, ω ;
- b) a força de reação aplicada ao sistema, pela rótula O .

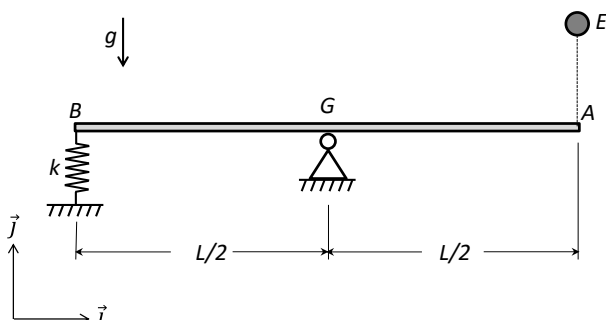
2ª Questão (4,0 pontos) - A figura mostra um sistema composto por duas barras homogêneas idênticas, cada uma de comprimento $2a$ e massa m . As barras são articuladas entre si, em A , e nas duas extremidades O e B . Na articulação A , está instalada uma mola de torção linear de constante K_T , que restringe elasticamente o movimento angular relativo entre as barras através de um torque linearmente proporcional ao ângulo θ . Uma força, horizontal constante, $\vec{F} = -F\vec{i}$, é



aplicada em B . Pede-se:

- a) Escreva os deslocamentos virtuais δB , δG_1 , δG_2 , dos pontos B , G_1 e G_2 , como função do deslocamento virtual $\delta\theta$.
- b) Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, deduza a equação de equilíbrio, na coordenada generalizada θ , em função de F e dos demais parâmetros.
- c) Admitindo $F=0$, escreva as funções de energia cinética e potencial do sistema.
- d) Determine, então, a nova posição de equilíbrio do sistema a partir da função de energia potencial e verifique a consistência do resultado, comparando-o ao item (b) (faça $F=0$ no resultado do item (b)).
- e) Por fim, utilizando o formalismo de Euler-Lagrange e admitindo que a força aplicada seja dependente do tempo, na forma $\vec{F} = -F_0 \sin \omega t \vec{i}$, deduza a equação diferencial de movimento do sistema, na coordenada generalizada θ .

3ª Questão (3,0 pontos).



A pequena esfera E de massa $m/12$ e dimensões desprezíveis atinge a barra de massa m e comprimento L , com velocidade vertical $\vec{v}_E = -v_E \vec{j}$, conhecida, no ponto A . Dado o coeficiente de restituição e e sabendo-se que a barra está em repouso antes do choque, pedem-se:

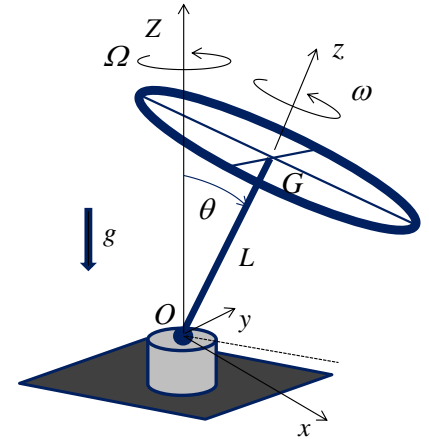
- a) O diagrama de impulsos agentes sobre o sistema;
- b) O impulso \vec{I} recebido pela esfera durante a colisão;
- c) A velocidade da esfera \vec{v}'_E e a velocidade angular ω' da barra, imediatamente após a colisão.



RESOLUÇÃO

1ª Questão (3,0 pontos).

O anel homogêneo (de espessura desprezível), de massa m e raio R gira ao redor da barra OG , de massa desprezível e comprimento L , com velocidade angular a ela relativa (i.e., de rotação própria) constante, ω . Sabe-se que este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo θ e taxa de precessão Ω , ambos constantes e considerados conhecidos. O sistema $Oxyz$ acompanha a barra OG , com Oy sempre horizontal. Os eixos Ox , Oy , Oz e OZ são orientados respectivamente pelos versores, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} e \vec{K} . Nesta situação de equilíbrio dinâmico, determine:



- a) a velocidade angular de rotação própria, ω ,
- b) a força de reação aplicada ao sistema, pela rótula O .

Resolução:

a)

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \Omega \vec{K} + \omega \vec{k} ; \text{ mas } \vec{K} = \cos\theta \vec{k} - \text{sen}\theta \vec{i} , \text{ logo:}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{abs} = (\omega + \Omega \cos\theta) \vec{k} - \Omega \text{sen}\theta \vec{i}} \tag{0,5}$$

Da condição de precessão estacionária, ($\dot{\phi} = \Omega = \text{cte}$; $\dot{\psi} = \omega = \text{cte}$; $\dot{\theta} = 0$), pode-se deduzir, pelo TMA, $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$, com O fixo, um ponto pertencente à extensão ideal rígida do anel, que:

$$\boxed{(J\omega + (J - I)\Omega \cos\theta)\Omega = mgz_G = mgL}, \tag{1,0}$$

de onde:

$$\boxed{\omega = \frac{mgL}{J\Omega} + \left(\frac{I}{J} - 1\right)\Omega \cos\theta}; \quad \text{com } J = mR^2 \text{ e } I = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right).$$

Ou seja:

$$\boxed{\omega = \frac{gL}{\Omega R^2} + \left(\frac{L^2}{R^2} - \frac{1}{2}\right)\Omega \cos\theta} \tag{0,5}$$

b) Neste caso de precessão estacionária ($\vec{\omega}_{arr} = \Omega \vec{K} = \text{cte}$), tem-se: $\vec{a}_G = \vec{\omega}_{arr} \wedge (\vec{\omega}_{arr} \wedge (G - O))$, de forma que: $\vec{a}_G = \Omega \vec{K} \wedge (\Omega \vec{K} \wedge L \vec{k}) = \Omega \vec{K} \wedge (\Omega L \text{sen}\theta \vec{j}) = \Omega^2 L \text{sen}\theta (\vec{K} \wedge \vec{j})$, i.e.,

$$\boxed{\vec{a}_G = -\Omega^2 L \text{sen}\theta (\cos\theta \vec{i} + \text{sen}\theta \vec{k})} \tag{0,5}$$

Do TMB seguem as reações, $X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, aplicadas pela articulação ao sistema.

De fato: $m\vec{a}_G = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} - mg\vec{K}$, ou seja,

$$-m\Omega^2 L \text{sen}\theta (\cos\theta \vec{i} + \text{sen}\theta \vec{k}) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} - mg(-\text{sen}\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{k})$$



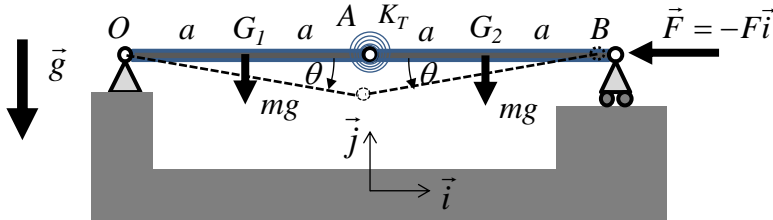
Tal que:

$$\begin{aligned} X &= -mg \left(\operatorname{sen} \theta + \frac{\Omega^2 L}{g} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right) \\ Y &= 0 \\ Z &= mg \left(\cos \theta - \frac{\Omega^2 L}{g} \operatorname{sen}^2 \theta \right) \end{aligned}$$

(0,5)



2ª Questão (4,0 pontos) - A figura mostra um sistema composto por duas barras homogêneas idênticas, cada uma de comprimento $2a$ e massa m . As barras são articuladas entre si, em A , e nas duas extremidades O e B . Na articulação A , está instalada uma mola de torção linear de constante K_T , que restringe elasticamente o movimento angular relativo entre as barras através de um torque linearmente proporcional ao ângulo θ . Uma força, horizontal constante, $\vec{F} = -F\vec{i}$, é



aplicada em B . Pedem-se:

aplicada em B . Pedem-se:

- Escreva os deslocamentos virtuais $\delta B, \delta G_1, \delta G_2$, dos pontos B, G_1 e G_2 , como função do deslocamento virtual $\delta\theta$.
- Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, deduza a equação de equilíbrio, na coordenada generalizada θ , em função de F e dos demais parâmetros.
- Escreva as funções de energia cinética e potencial do sistema.
- Admitindo $F=0$, determine a nova posição de equilíbrio do sistema a partir da função de energia potencial e verifique a consistência do resultado, comparando-o ao item (b).
- Por fim, utilizando o formalismo de Euler-Lagrange e admitindo que a força aplicada seja dependente do tempo, na forma $\vec{F} = -F_0 \sin \omega t \vec{i}$, deduza a equação de movimento do sistema, na coordenada generalizada θ .

Resolução:

- As posições dos pontos B, G_1 e G_2 são escritas, na base canônica da figura:

$$\begin{aligned} (B - O) &= 4a \cos\theta \vec{i} \\ (G_1 - O) &= a(\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) \\ (G_2 - O) &= a(3\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) \end{aligned}$$

Delas decorrem os respectivos deslocamentos virtuais, expressos em função de $\delta\theta$:

$$\begin{cases} \delta B = -4a\delta\theta \sin\theta \vec{i} \\ \delta G_1 = -a\delta\theta(\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \\ \delta G_2 = -a\delta\theta(3\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \end{cases} \quad . \quad (0,5)$$

- Pelo PTV, podemos escrever:

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_g + \delta W_E = 0.$$

onde, os trabalhos virtuais associados, respectivamente, à força aplicada em B , às forças-peso e ao torque restaurador elástico, $M_\theta = -K_T 2\theta$, são dados por:

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \vec{F} \cdot \delta B = 4Fa\delta\theta \sin\theta \\ \delta W_g &= -mg\vec{j} \cdot \delta G_1 - mg\vec{j} \cdot \delta G_2 = 2mga\delta\theta \cos\theta \quad . \\ \delta W_E &= -K_T 2\theta \delta\theta \end{aligned} \quad (0,5)$$

Decorre, então:

$$(4Fas\theta + 2mga \cos\theta - 2\theta K_T) \delta\theta = 0 \quad .$$



E desta, a equação de equilíbrio:

$$\boxed{2 \frac{F}{mg} \sin \theta + \cos \theta - \frac{K_T \theta}{mga} = 0} \quad (0,5)$$

A solução desta equação fornece o ângulo de equilíbrio.

c) Escreva as funções de energia cinética e potencial do sistema.

A energia cinética do sistema é a soma das parcelas correspondentes a cada uma das barras: $T = T_1 + T_2$.

Mas

$$T_1 = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \frac{(2a)^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2$$

e

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{G_2} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} m \frac{(2a)^2}{12} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{6} ma^2 \dot{\theta}^2.$$

Mas, como $\vec{v}_{G_2} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge (G_2 - B)$; $(B - O) = 4a \cos \vec{\theta}_i \Rightarrow \vec{v}_B = -4a \sin \vec{\theta}_i$; $(G_2 - B) = -a(\cos \vec{\theta}_i + \sin \vec{\theta}_j)$ e $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \vec{k}$; vem que $\vec{v}_{G_2} = -a \dot{\theta} (3 \sin \vec{\theta}_i + \cos \vec{\theta}_j)$ e assim, $v_{G_2}^2 = a^2 \dot{\theta}^2 (9 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a^2 \dot{\theta}^2 (8 \sin^2 \theta + 1)$. Desta

forma, $T_2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{6} ma^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}^2 (8 \sin^2 \theta + 1) + \frac{1}{6} ma^2 \dot{\theta}^2 = (4 \sin^2 \theta + \frac{2}{3}) ma^2 \dot{\theta}^2$; que somada com

$T_1 = \frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2$ fornece:

$$T = (4 \sin^2 \theta + \frac{4}{3}) ma^2 \dot{\theta}^2 = 4 ma^2 \dot{\theta}^2 (\sin^2 \theta + \frac{1}{3}) \quad (0,5)$$

Alternativamente, a energia cinética da barra 2 pode ser calculada de $T_2 = \frac{1}{2} v_B^2 - \vec{\omega}_2 \cdot (B - G_2) \wedge m \vec{v}_B + \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2$, que conduz, também após alguma álgebra, à mesma expressão anterior.

Energia Potencial:

O torque reativo é derivado de um potencial de energia de deformação elástica, $V_E(\theta)$; ou seja,

$M_\theta = -K_T 2\theta = -\frac{dV_E}{d\theta}$. Segue, então, que $V_E(\theta) = K_T \theta^2$. A energia potencial do sistema é, assim, a soma de

uma parcela associada a ação gravitacional e outra à deformação elástica da mola torcional, na forma:

$$V = V_g + V_E = mgh_1 + mgh_2 + K_T \theta^2 = -2mga \sin \theta + K_T \theta^2, \text{ logo:}$$

$$V(\theta) = -2mga \sin \theta + K_T \theta^2 \quad (0,5)$$

d) Admitindo $F=0$, determine a nova posição de equilíbrio do sistema a partir da função de energia potencial e verifique a consistência do resultado, comparando-o ao item (b).

Da condição de estacionariedade de $V(\theta)$ no equilíbrio segue que:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow -2mga \cos \theta + 2K_T \theta = 0 \text{ e, portanto,}$$



$$\cos \theta - \frac{K_T \theta}{mga} = 0$$

(0,5)

Que corresponde à expressão deduzida no item (b), com $F=0$.

- e) Por fim, utilizando o formalismo de Euler-Lagrange e admitindo que a força aplicada seja dependente do tempo, na forma $\vec{F} = -F_0 \sin \omega t \vec{i}$, deduza a equação de movimento do sistema, na coordenada generalizada θ .

A equação de Euler-Lagrange na coordenada generalizada θ , pode ser escrita, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta^{nc}$, com

$Q_\theta^{nc} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial \theta}$ a força generalizada associada a forças aplicadas de natureza não conservativa. No caso, com

uma única força aplicada no ponto B, $Q_\theta^{nc} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = -F_0 \sin \omega t \vec{i} \cdot (-4a \sin \theta \vec{i}) = 4F_0 a \sin \omega t \sin \theta$. (0,5)

Fazendo as derivadas,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 8ma^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 = 4ma^2 \dot{\theta}^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 8ma^2 \dot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = 8ma^2 \left[\ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) + \dot{\theta}^2 \sin 2\theta \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2(K_T \theta - mga \cos \theta)$$

E assim a equação diferencial do movimento fica expressa:

$$8ma^2 \left[\ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) + \dot{\theta}^2 \sin 2\theta \right] - 4ma^2 \dot{\theta}^2 \sin 2\theta + 2(K_T \theta - mga \cos \theta) = 4F_0 a \sin \omega t \sin \theta,$$

que rearranjada fica

$$\left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sin 2\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{K_T \theta}{ma^2} - \frac{g}{a} \cos \theta \right) - \frac{1}{2} \frac{F_0 a}{ma^2} \sin \omega t \sin \theta = 0$$

(0,5)

Que é uma *e.d.o.* (equação diferencial ordinária) não-linear de segunda ordem, não autônoma e sob excitação denominada paramétrica, porquanto a forçante comparece modulando um dos termos que depende da função $\theta(t)$. Observe que no equilíbrio, i.e., $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ e com $F_0 = 0$, ou seja, na ausência de forçante não conservativa,

a equação de movimento reduz-se a uma equação algébrica na forma $\left(\frac{K_T \theta}{ma^2} - \frac{g}{a} \cos \theta \right) = 0$, que recupera

exatamente aquela determinada no item (d). Adicionalmente, se $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ e se a força de excitação for constante, $\vec{F} = -F_0 \vec{i}$, como no caso do item (b), a equação de equilíbrio deduzida naquele item é também prontamente recuperada. Esta análise mostra a consistência e correção do equacionamento.



Observações adicionais:

No item (b), procura-se, evidentemente, a solução de equilíbrio no primeiro quadrante. Deve-se, adicionalmente, estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio, o que se consegue, por exemplo, através de uma expansão em série de Taylor em torno deste ponto e de uma análise apropriada.

Note que, na ausência da força peso, a equação de equilíbrio oriunda da aplicação do PTV fica $4Fasen\theta - 2\theta K_T = 0$, que fornece um modelo bastante simplificado ao problema clássico de flambagem de uma viga. O ‘ponto de instabilidade’, ou de ‘bifurcação de equilíbrio’ ou ainda, a ‘carga de flambagem’, podem então ser avaliados. Basta considerar a equação de equilíbrio linearizada, i.e., $\theta \ll 1$, na forma $\theta(2Fa - K_T) = 0$.

A equação acima é satisfeita se $\theta = 0$, equilíbrio trivial, ou se $2Fa - K_T = 0$, ou seja, se $F = F_{cr} = K_T/2a$. Por outro lado, da teoria de estruturas, sabe-se que a carga crítica (carga de Euler) de flambagem de uma viga linear-elástica, de comprimento $L=4a$ e produto de rigidez flexional EI , é dada por:

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} = \pi^2 \frac{EI}{16a^2}$$

de tal forma, que uma mola (de torção) equivalente, do ponto de vista de flambagem, será dada pela constante,

$$K_T = 2a\pi^2 \frac{EI}{16a^2} = \pi^2 \frac{EI}{8a} = F_{cr} \frac{L}{2}$$

Este é um ‘primeiro modelo equivalente-discreto’ de flambagem de uma viga.

Já, na presença da força peso, a equação de equilíbrio linearizada, $\theta \ll 1$, fica, $2Fa\theta + mga - \theta K_T = 0$; ou ainda, $\theta(2Fa - K_T) + mga = 0$, que tem uma única solução,

$$\theta_{eq} = \frac{mga}{2Fa - K_T}$$

Note que esta última equação se torna singular quando a magnitude da força, crescente a partir do valor nulo, atinge o mesmo valor crítico anterior, $F = F_{cr} = K_T/2a$. Ou seja, a ação da força peso não altera o valor da carga crítica de flambagem. Seu efeito é definir uma nova e única posição de equilíbrio. Esta nova condição de equilíbrio pode ser aproximadamente avaliada pela expressão acima, mas estará exatamente determinada com a solução da equação transcendental deduzida no item (b): $2 \frac{F}{mg} \text{sen}\theta + \cos\theta - \frac{K_T\theta}{mga} = 0$.

Por fim, se a *e.d.o.* de movimento do sistema, deduzida no item (e), for linearizada, para pequenos ângulos e velocidades angulares, toma a forma:

$$\frac{1}{3} \ddot{\theta} + \frac{1}{4} \left(\frac{K_T\theta}{ma^2} - \frac{g}{a} \right) - \frac{1}{2} \frac{F_0 a}{ma^2} \sin \omega t \theta = 0,$$

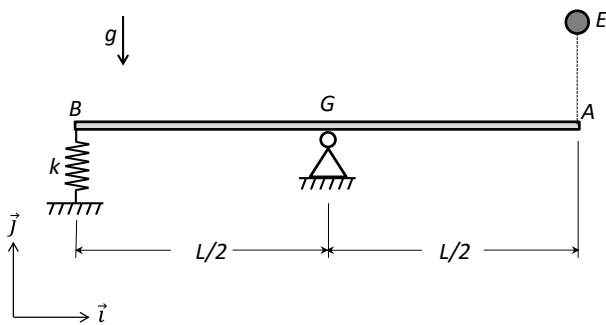
ou ainda,

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2} \left(\frac{K_T}{2ma^2} - \frac{F_0 a}{ma^2} \sin \omega t \right) \theta - \frac{3}{4} \frac{g}{a} = 0$$

Na ausência da gravidade, esta equação fica escrita

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2} \left(\frac{K_T}{2ma^2} - \frac{F_0 a}{ma^2} \sin \omega t \right) \theta = 0.$$

Esta equação é uma forma da clássica Equação de Mathieu, que exhibe instabilidades quando a amplitude da carga pulsante atinge o valor crítico $F_{cr} = K_T/2a$, deduzido acima. De fato, se $F_0 > F_{cr} = K_T/2a$, a rigidez efetiva do sistema, dada pelo termo que multiplica θ , e que é função do tempo, tornar-se-á periodicamente negativa, causando a instabilidade.

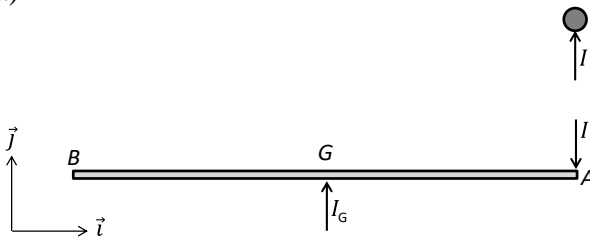


A pequena esfera E de massa $m/12$ e dimensões desprezíveis atinge a barra de massa m e comprimento L , com velocidade vertical $\vec{v} = -v\vec{j}$, conhecida, no ponto A . Dado o coeficiente de restituição e , e sabendo-se que a barra está em repouso antes do choque, pedem-se:

- O diagrama de corpo-livre e impulsos do sistema;
- O impulso \vec{I} recebido pela esfera durante a colisão;
- A velocidade da esfera \vec{v}'_E e a velocidade angular ω' da barra, imediatamente após a colisão.

Resolução:

(a)



(0,5)

(b) e (c)

- TRI para a esfera: $\vec{L} + \vec{I} = \vec{L}' \Rightarrow -\frac{m}{12}v_E + I = \frac{m}{12}v'_E \Rightarrow I = \frac{m}{12}(v'_E + v_E)$ (1)

(0,5)

- TMI para a barra, pólo G : $\vec{K}_G + (A-G) \wedge \vec{I}_A = \vec{K}'_G \Rightarrow \vec{0} + \frac{L}{2}\vec{i} \wedge (-I\vec{j}) = J_G\omega'\vec{k} \Rightarrow$

$-\frac{L}{2}I = \frac{1}{12}mL^2\omega' \Rightarrow \omega' = -\frac{6I}{mL}$ (2) (0,5)

- Cinemática do CR: $\vec{v}'_A = \vec{\omega}' \wedge (A-G) \Rightarrow v'_A\vec{j} = \omega'\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\vec{i} \Rightarrow v'_A = \frac{\omega'L}{2}$ (3)

- Choque: $v'_A - v'_E = -e(v_A - v_E) \Rightarrow v'_A - v'_E = ev_E$ (4)(0,5)

- Solução do sistema:

(2) em (3) $\Rightarrow v'_A = -\frac{3I}{m}$ (5)

(5) em (4) $\Rightarrow v'_E = -\left(\frac{3I}{m} + ev_E\right)$ (6)

(6) em (1) $\Rightarrow I = \frac{m}{15}(1-e)v_E \Rightarrow \vec{I} = \frac{m}{15}(1-e)v_E\vec{j}$ (7)(0,5)

(7) em (6) $\Rightarrow v'_E = -\frac{1+4e}{5}v_E \Rightarrow \vec{v}'_E = -\frac{1+4e}{5}v_E\vec{j}$

(7) em (2) $\Rightarrow \omega' = -\frac{2}{5}(1-e)\frac{v_E}{L}$ (0,5)