ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

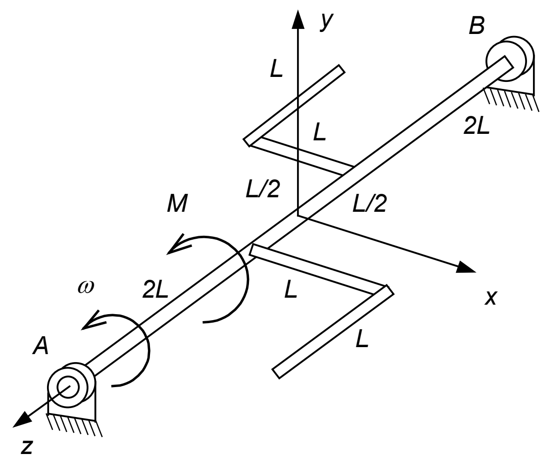
PME 3200 – MECÂNICA II –Prova de Recuperação – 21 de julho de 2016

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos)

O dispositivo da figura gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_z\,\vec{k}$ variável acionado pelo momento externo $\vec{M}(t) = M_z\,\vec{k}$. O dispositivo é formado por barras com comprimentos conforme mostrado na figura e gira sobre o anel ***A*** e articulação ***B***, ambos fixos. Pede-se:

(a) fazer o diagrama de forças sobre o corpo livre;
(b) calcular o momentos das forças externas em relação ao centro de massa;
(c) calcular Jz e Jxz do dispositivo em relação ao centro de massa;
(d) obter a equação diferencial de movimento;
(e) calcular as reações dinâmicas nos mancais ***A*** e ***B*** no instante que a velocidade angular é $\boldsymbol{\omega}$.

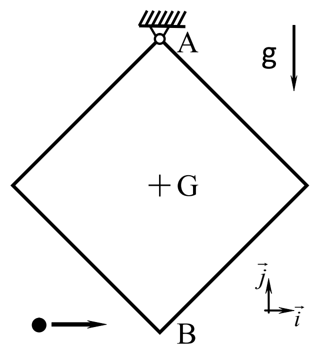


Obs.: as barras tem diâmetro desprezível e densidade linear de massa $\boldsymbol{\rho}$ por unidade de comprimento. Despreze a ação gravitacional.

2ª Questão (3,0 pontos)

Uma placa quadrada de massa M e lado a está presa a uma articulação no ponto A. A placa encontra-se inicialmente em repouso. Em um dado instante, o ponto B da placa é atingido por uma pequena esfera de massa m, movendo-se horizontalmente, como indicado na figura. Sabendo-se que a esfera atinge a placa com uma velocidade conhecida $\vec{V}_P = V\vec{i}$ e que o coeficiente de restituição no choque é e, pede-se:

(a) a velocidade angular $\vec{\omega}' = \omega'\vec{k}$ da placa imediatamente após o choque
(b) o impulso que a esfera aplica sobre a placa durante o choque.

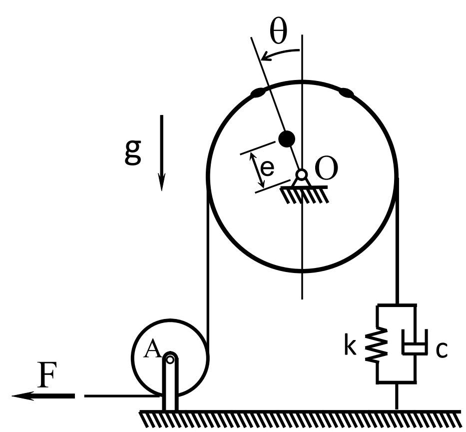


Dado: momento de inércia da placa em relação ao eixo z passando por G: $J_{G_z} = \frac{1}{6}Ma^2$

3ª Questão (3,5 pontos)

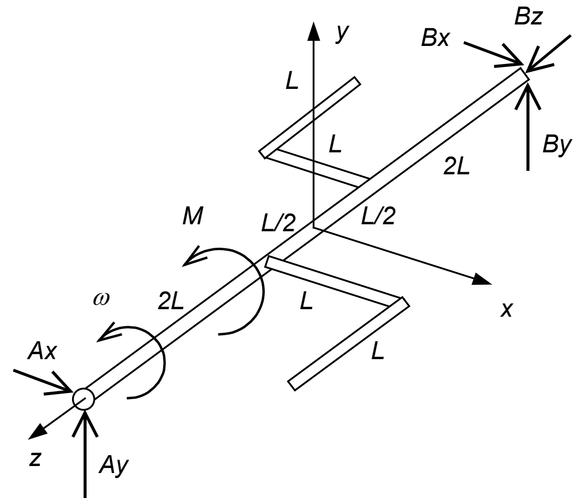
No sistema mostrado na figura, o disco de centro O possui massa M e raio R. Uma massa concentrada m está fixa ao disco a uma distância e do centro O. A massa m está em sua altura máxima quando a coordenada θ vale zero. A periferia do disco está acoplada a uma mola de rigidez k e a um amortecedor viscoso linear de constante c. Uma força horizontal F atua em um fio inextensível passante pela polia de centro A, de massa desprezível. Utilizando a coordenada generalizada θ e admitindo que a mola tem deformação nula quando a coordenada θ vale zero, pede-se:

(a) a energia cinética do sistema;
(b) a energia potencial do sistema;
(c) a função dissipativa de *Rayleigh* do sistema;
(d) a equação de movimento para a coordenada θ, usando o método de Lagrange.



Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos)

a) Diagrama de forças sobre o corpo livre: (**0,5 ponto**)



b) Momento e produto de inércia (**0,5 ponto**)

$$J_{xz} = 2m\frac{L}{2}*\frac{L}{2} + 2mL*L = \frac{5mL^2}{2} \qquad \boxed{J_{xz} = \frac{5\rho L^3}{2}} \qquad (1)$$

$$J_z = 2\frac{mL^2}{3} + 2mL^2 = \frac{8mL^2}{3} \qquad \boxed{J_z = \frac{8\rho L^3}{3}} \qquad (2)$$

c) Calcular o momentos das forças externas em relação ao centro de massa (**0,5 ponto**)

$$\vec{M}_G = (A-G)\wedge\vec{R}_A + (B-G)\wedge\vec{R}_B + \vec{M}$$

$$\vec{M}_G = \frac{5}{2}L\vec{k}\wedge(A_x\vec{i} + A_y\vec{j}) - \frac{5}{2}L\vec{k}\wedge(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) + M_z\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_G = \frac{5}{2}L(A_x\vec{j} - A_y\vec{i} - B_x\vec{j} + B_y\vec{i}) + M_z\vec{k}}$$

d) Equação dinâmica: tomando como pólo o centro de massa G da figura, o momento angular resulta em:

$$\left[\vec{H}_G\right] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{zx} & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \left(-J_{xz}\vec{i} + J_z\vec{k}\right)\omega \qquad (\mathbf{0{,}5\ ponto})$$

Para ω variável a derivada temporal do momento angular resulta:

$$\dot{\vec{H}}_G = \left(-J_{xz}\vec{i} + J_z\vec{k}\right)\dot{\omega} + \left(-J_{xz}\dot{\vec{i}} + J_z\dot{\vec{k}}\right)\omega \ :$$

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\wedge\vec{i} = \omega\vec{k}\wedge\vec{i} = \omega\vec{j} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}\wedge\vec{k} = \omega\vec{k}\wedge\vec{k} = 0$$

$\boxed{\dot{\vec{H}}_G = -J_{xz}\dot{\omega}\vec{i} - J_{xz}\omega^2\vec{j} + J_z\dot{\omega}\vec{k} = \vec{M}_G}$ em cada direção resulta: (**0,5 ponto**)

$$\begin{cases} -J_{xz}\dot{\omega} = \dfrac{5}{2}L(B_y - A_y) \quad (3) \\ -J_{xz}\omega^2 = \dfrac{5}{2}L(A_x - B_x) \quad (4) \\ J_z\dot{\omega} = M_z \quad (5) \end{cases}$$

(0,5 ponto)

e) Calcular as reações nos mancais: usando o Teorema da Resultante (**0,5 ponto**)

$m_{total}\,\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{ext}$ como o centro de massa coincide com o eixo $\vec{a}_G = 0$;

$A_x + B_x = 0 \quad (6)$; $A_y + B_y = 0 \quad (7)$; $B_z = 0 \quad (8)$

Usando (1); (3) e (7)

$$B_y = -\frac{J_{xz}\dot{\omega}}{5L} = -\frac{\rho L^2}{2}\dot{\omega} \quad \text{e} \quad \boxed{A_y = \frac{\rho L^2}{2}\dot{\omega}}$$

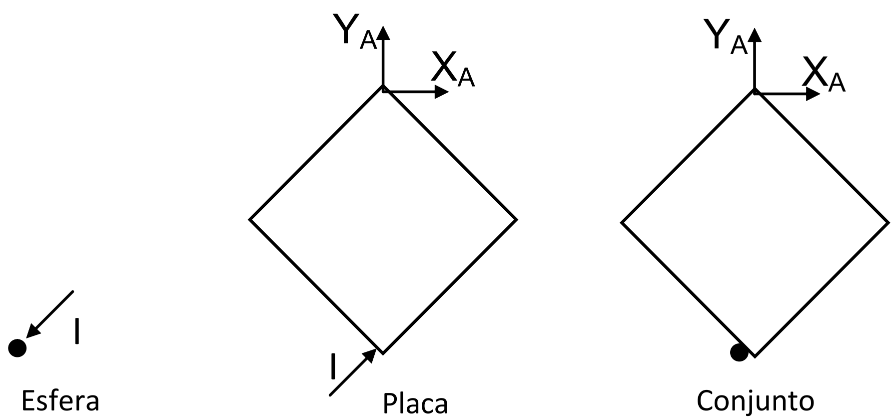
Usando (1); (4) e (6)

$$B_x = \frac{J_{xz}\omega^2}{5L} = \frac{\rho L^2}{2}\omega^2 \quad \text{e} \quad \boxed{A_x = -\frac{\rho L^2}{2}\omega^2} \quad \text{e} \quad \boxed{B_z = 0}$$

$$\dot{\omega} = \frac{3M}{8\rho L^3}$$

Resolução da 2ª Questão (3,0 pontos)

Diagramas de corpo livre:



Relação cinemática para a placa imediatamente depois do choque:

$\vec{V}_B' = \vec{V}_A' + \omega' \wedge (B-A)$, em que $\vec{V}_A' = \vec{0}$ e $(B-A) = -a\sqrt{2}\vec{j} \quad \Rightarrow \vec{V}_B = a\sqrt{2}\omega'\vec{i}$ **(0.5)**

Velocidade da esfera após o choque: $\vec{V}_P' = V_{P_x}'\vec{i} + V_{P_y}'\vec{j}$

(a) Momento de inércia da placa para eixo z passando por A:

$$J_{z_A} = J_{z_G} + M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow J_{z_A} = \frac{2}{3}Ma^2 \; \textbf{(0.3)}$$

Teorema do momento dos impulsos para o conjunto, polo A:

$$\vec{M}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{H}_A = \vec{H}_A'$$

$$\Rightarrow (B-A) \wedge m\vec{V}_P = m(G-A) \wedge \vec{V}_A' + [I_A]\{\omega'\} + (B-A) \wedge m\vec{V}_P'$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2}a\vec{j} \wedge mV\vec{i} = J_{z_A}\omega'\vec{k} - \sqrt{2}a\vec{j} \wedge mV_{P_x}'\vec{i}$$

$$\Rightarrow ma\sqrt{2}V\vec{k} = J_{z_A}\omega'\vec{k} + ma\sqrt{2}V_{P_x}'\vec{k} \quad (\underline{\text{Eq. 1}})$$

Teorema da resultante dos impulsos sobre a esfera.

Supondo choque sem atrito: $\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j}$, com $I_x = I_y = \frac{\sqrt{2}}{2}I$

$$\vec{I} = m(\vec{V}_P' - \vec{V}_P) \; \textbf{(0.3)} \Rightarrow \begin{cases} -I_x = m(V_{P_x}' - V) \\ -I_y = mV_{P_y}' \end{cases}$$

Considerando as duas equações e que $I_x = I_y = \frac{\sqrt{2}}{2}I$, tem-se $V_{P_y}' = V_{P_x}' - V$ (<u>Eq. 2</u>)

Hipótese de Newton, considerando a direção da normal de choque.
Análise das componentes das velocidades a 45º
$V_B'_{45^o} - V_P'_{45^o} = e\left(V_{P45^o} - V_{B45^o}\right)$, em que $V_P'_{45^o}$ tem contribuição de V_{P_x}' e V_{P_y}'

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\omega' a\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}V_{P_x}' - \frac{\sqrt{2}}{2}V_{P_y}' = e\frac{\sqrt{2}}{2}V$$ **(0.5)** (<u>Eq. 3</u>)

Resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas $\Rightarrow$ $\boxed{\omega' = \frac{3\sqrt{2}mV(1+e)}{4Ma+6ma} == \frac{(1+e)}{1+\frac{2}{3}\frac{M}{m}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{V}{a}}$ **(0.7)**

(b) Teorema do momento dos impulsos para a placa, polo A, $\vec{M}_A = (B-A)\wedge I_x\vec{i} = a\,I\,\vec{k}$

$\vec{M}_A = \vec{H}_A' - \vec{H}_A$

$\Rightarrow a\,I\,\vec{k} = J_{z_A}\omega'\vec{k} - \vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{MmV\sqrt{2}(1+e)}{2M+3m} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1+e)}{1+\frac{3}{2}\frac{m}{M}}mV}$$ **(0.7)**

Resolução da 3ª Questão (3,5 pontos)
(a) A energia cinética do sistema

$$T = T_{Disco} + T_{Massa}$$
$$T_{Disco} = \frac{1}{2} m\vec{V}_O.\vec{V}_O + m\vec{V}_O.\left[\vec{\dot{\theta}} \wedge (G - O)\right] + \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^t [I_O]\{\dot{\theta}\}, \text{ em que } \vec{V}_O = \vec{0}$$
$$\Rightarrow T_{Disco} = \frac{1}{2} J_{z_O} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow T_{Disco} = \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2 \qquad \textbf{(0,5 ponto)}$$
$$T_{Massa} = \frac{1}{2} m\vec{V}_{massa}.\vec{V}_{massa}, \text{ em que } \vec{V}_{massa} = \vec{V}_O + \dot{\theta}\,\vec{k} \wedge (P - O) \quad \Rightarrow \vec{V}_{massa} = -\dot{\theta}\, e \cos\theta\, \vec{i} - \dot{\theta}\, e\, sen\theta\, \vec{j}$$
$$\Rightarrow T_{Massa} = \frac{me^2}{2}\dot{\theta}^2 \qquad \textbf{(0,5 ponto)}$$
$$\Rightarrow \boxed{E = \left(\frac{MR^2}{4} + \frac{me^2}{2}\right)\dot{\theta}^2}$$

(e) a energia potencial do sistema;

$$V = V_{Elástica} + V_{Grav.} \quad \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2} k (R\theta)^2 + mge\cos\theta} \qquad \textbf{(1,0 ponto)}$$

(f) a função dissipativa de *Rayleigh* do sistema;

$$\boxed{R = \frac{1}{2} c (R\dot{\theta})^2} \qquad \textbf{(0,5 ponto)}$$

(g) Força generalizada: $\delta W = F\delta x$, em que $x = R\theta$

$$\Rightarrow Q_\theta = F\frac{\partial x}{\partial \theta} \quad \Rightarrow Q_\theta = FR \qquad \textbf{(0,5 ponto)}$$

Equação de movimento:
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{MR^2}{2} + me^2\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{MR^2}{2} + me^2\right)\ddot{\theta};$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta + mge\, sen\theta \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = cR^2\dot{\theta}$$
$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{MR^2}{2} + me^2\right)\ddot{\theta} + kR^2\theta - mge\, sen\theta + cR^2\dot{\theta} = FR} \qquad \textbf{(0,5 ponto)}$$