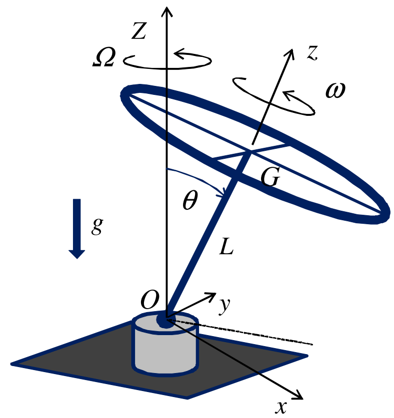
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

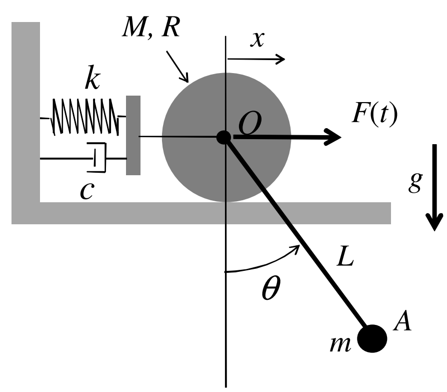
Mecânica II – PME 3200 – Prova de Recuperação – 23/07/2015
Duração da Prova: 100 minutos
(Não é permitido o uso de dispositivos eletro-eletrônicos)

1ª Questão (3,5 pontos) O anel homogêneo (de espessura desprezível), de massa m e raio R gira ao redor da barra OG, de massa desprezível e comprimento L, com velocidade angular a ela relativa (i.e., de rotação própria) constante, ω. Sabe-se que este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo θ e taxa de precessão Ω, ambos constantes e considerados conhecidos. O sistema $Oxyz$ acompanha a barra OG, com Oy sempre horizontal. Os eixos Ox, Oy, Oz e OZ são orientados respectivamente pelos versores, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e $\vec{K}$. Nesta situação de equilíbrio dinâmico, determine:



(a) a velocidade angular de rotação própria, ω;
(b) a força de reação aplicada ao sistema, pela rótula O.

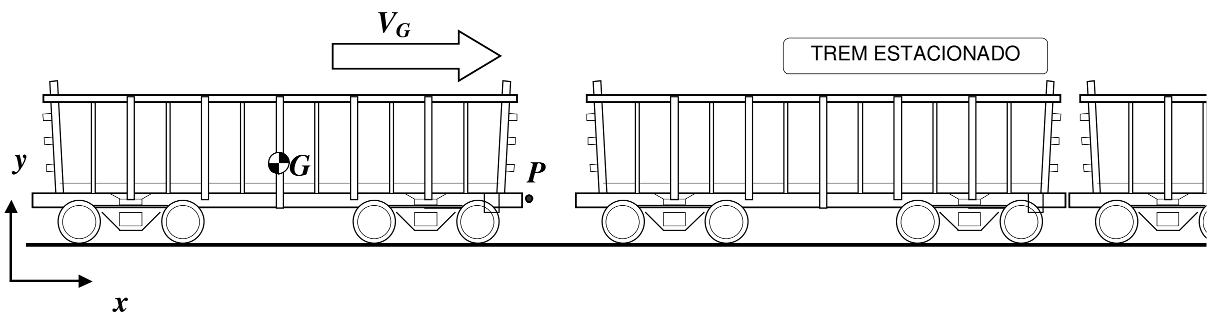
2ª Questão (3,5 pontos) No sistema mostrado na figura, o disco de centro O, massa M e raio R, rola sem escorregar sobre o plano horizontal e está ligado a uma parede vertical por meio de uma mola de rigidez k e de um amortecedor viscoso linear de constante c. Um pêndulo ideal, formado por uma pequena esfera de massa m posicionada na extremidade de uma haste de comprimento L e de massa desprezível, é acoplado ao centro do disco. A mola tem deformação nula quando a coordenada x vale zero. Uma força horizontal $F(t)$ atua no disco. Usando x e θ como coordenadas generalizadas, pede-se:



(a) a energia cinética do sistema;
(b) a energia potencial do sistema;
(c) a função de dissipação de *Rayleigh*, associada ao amortecedor;
(d) as demais forças generalizadas não conservativas atuando sobre o sistema;
(e) as equações de movimento para as coordenadas x e θ, usando o formalismo de *Lagrange*.

3ª Questão (3,0 pontos)

Durante a formação de um trem estacionado e imóvel (freio acionado) no pátio de manobras, um vagão de massa total *m* se choca com velocidade constante $\vec{V}_G = u\vec{i}$ imediatamente anterior ao choque. O contato entre os vagões ocorre no ponto *P*, coincidente com o centro dos engates tal que $(P - G) = a\vec{i} - b\vec{j}$. Conhecido o coeficiente de restituição e, devido ao aparelho de choque e tração do vagão e desprezando qualquer forma de atrito, pede-se:



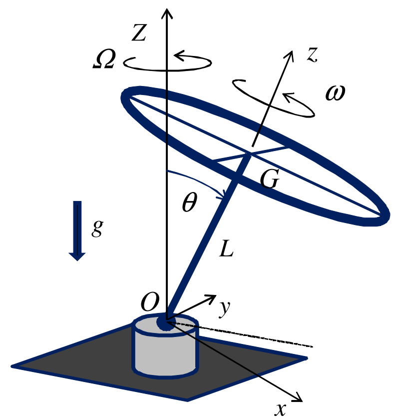
a) elabore o diagrama de corpo-livre do vagão no instante do impacto;
b) equacione o problema de impacto;
c) determine o impulso $\vec{I}$ aplicado no ponto *P* do vagão.
d) determine e a velocidade $\vec{V}_G' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$, do centro de massa *G* do vagão, logo após o choque.
e) determine o vetor de rotação do vagão $\vec{\omega}'$, logo após o choque.

Dado: J_{Gz}, momento de inércia total do vagão em torno do eixo Gz no centro de massa.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Mecânica II – PME 3200 – Prova de Recuperação – 23/07/2015
Duração da Prova: 100 minutos
(Não é permitido o uso de dispositivos eletro-eletrônicos)

1ª Questão (3,5 pontos)
O anel homogêneo (de espessura desprezível), de massa m e raio R gira ao redor da barra OG, de massa desprezível e comprimento L, com velocidade angular a ela relativa (i.e., de rotação própria) constante, ω. Sabe-se que este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo θ e taxa de precessão Ω, ambos constantes e considerados conhecidos. O sistema $Oxyz$ acompanha a barra OG, com Oy sempre horizontal. Os eixos Ox, Oy, Oz e OZ são orientados respectivamente pelos versores, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e $\vec{K}$. Nesta situação de equilíbrio dinâmico, determine:



(a) a velocidade angular de rotação própria, ω,
(b) a força de reação aplicada ao sistema, pela rótula O.

Resolução:

a)

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \Omega\vec{K} + \omega\vec{k} \text{ ; mas } \vec{K} = \cos\theta\,\vec{k} - \text{sen}\,\theta\,\vec{i} \text{ , logo:}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{abs} = (\omega + \Omega\cos\theta)\,\vec{k} - \Omega\,\text{sen}\,\theta\vec{i}} \qquad (0,5)$$

Da condição de precessão estacionária, $(\dot{\phi} = \Omega = \text{cte};\ \dot{\psi} = \omega = \text{cte};\ \dot{\theta} \equiv 0)$, pode-se deduzir, pelo TMA, $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$, com O fixo, um ponto pertencente à extensão ideal rígida do anel , que:

$$\boxed{\left(J\omega + (J - I)\Omega\cos\theta\right)\Omega = mgz_G = mgL} \qquad (1,5)$$

de onde:

$$\boxed{\omega = \frac{mgL}{J\Omega} + (\frac{I}{J} - 1)\Omega\cos\theta}\text{; com } J = mR^2 \text{ e } I = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right).$$

Ou seja:

$$\boxed{\omega = \frac{gL}{\Omega R^2} + \left(\frac{L^2}{R^2} - \frac{1}{2}\right)\Omega\cos\theta} \qquad (0,5)$$

b) Neste caso de precessão estacionária ($\vec{\omega}_{arr} = \Omega\vec{K} = \text{cte}$), tem-se: $\vec{a}_G = \vec{\omega}_{arr} \wedge \left(\vec{\omega}_{arr} \wedge (G - O)\right)$, de forma que: $\vec{a}_G = \Omega\vec{K} \wedge \left(\Omega\vec{K} \wedge L\vec{k}\right) = \Omega\vec{K} \wedge \left(\Omega L\,\text{sen}\,\theta\vec{j}\right) = \Omega^2 L\,\text{sen}\theta(\vec{K} \wedge \vec{j})$, i.e.,

$$\boxed{\vec{a}_G = -\Omega^2 L\,\text{sen}\theta\left(\cos\theta\vec{i} + \text{sen}\,\theta\vec{k}\right)} \qquad (0,5)$$

Do TMB seguem as reações, $X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, aplicadas pela articulação ao sistema.

De fato: $m\vec{a}_G = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} - mg\vec{K}$, ou seja,

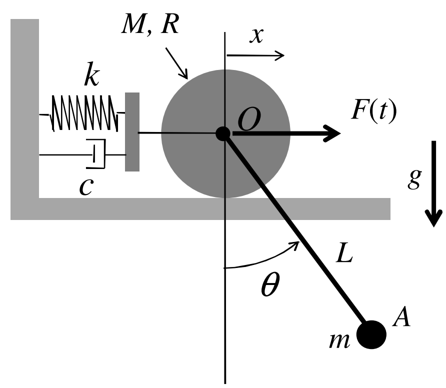
$$-m\Omega^2 L\text{sen}\theta\left(\cos\theta\vec{i} + \text{sen}\,\theta\vec{k}\right) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} - mg(-sen\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k})$$

Tal que:

$$\boxed{\begin{array}{l} X = -mg\left(\text{sen}\,\theta + \dfrac{\Omega^2 L}{g}\text{sen}\,\theta\cos\theta\right) \\ Y = 0 \\ Z = mg\left(\cos\theta - \dfrac{\Omega^2 L}{g}\text{sen}^2\,\theta\right) \end{array}}.$$ (0,5)

2ª Questão (3,5 pontos)

No sistema mostrado na figura, o disco de centro *O*, massa *M* e raio *R*, rola sem escorregar sobre o plano horizontal e está ligado a uma parede vertical por meio de uma mola de rigidez *k* e de um amortecedor viscoso linear de constante *c*. Um pêndulo ideal, formado por uma pequena esfera de massa *m* posicionada na extremidade de uma haste de comprimento *L* e de massa desprezível, é acoplado ao centro do disco. A mola tem deformação nula quando a coordenada *x* vale zero. Uma força horizontal *F*(*t*) atua no disco. Usando *x* e θ como coordenadas generalizadas, pede-se:



(a) a energia cinética do sistema;
(b) a energia potencial do sistema;
(c) a função de dissipação de Rayleigh, associada ao amortecedor;
(d) as demais forças generalizadas não conservativas atuando sobre o sistema;
(e) as equações de movimento para as coordenadas *x* e θ, usando o formalismo de Lagrange.

Resolução:

(a) Energia Cinética: $T = T_D + T_A$ (D:disco; A: pêndulo)

Disco, s/ escorregamento (C=CIR): $T_D = \frac{1}{2}I_C\Omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3MR^2}{2}\Omega^2 = \frac{3MR^2}{4}\Omega^2$.

Energia cinética do pêndulo: $T_A = \frac{1}{2}m{v_A}^2$.

Mas, $\vec{v}_A = (\dot{x} + \dot{\theta}L\cos\theta)\vec{i} + (\dot{\theta}L\sin\theta)\vec{j}$; então: $T_A = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + \dot{\theta}^2L^2\right)$.

Portanto: $\boxed{T = \left(\frac{3}{4}M + \frac{1}{2}m\right)\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2L^2}$. (1,0)

(b) Energia Potencial: $\boxed{V = \frac{1}{2}kx^2 + mgL(1-\cos\theta)}$. (0,5)

(c) Rayleighiana: $\boxed{R = \frac{1}{2}C\dot{x}^2}$. (0,5)

(d) Forças generalizadas outras (exceto as conservativas ou as dissipativas de Rayleigh):

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_x = F; \\ Q_\Theta = 0 \end{array}}.$$ (0,5)

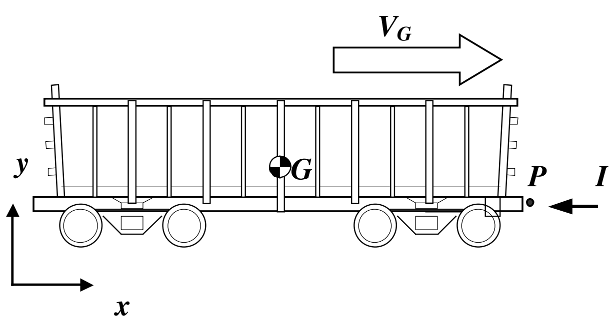
(e) Aplicando a equação de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$ vem:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{x} + (mL\cos\theta)\ddot{\theta} - mL\dot{\theta}^2\sin\theta + C\dot{x} + kx = F \\ (mL\cos\theta)\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0 \end{array}}.$$ (1,0)

Resolução da 3a. Questão (3,0 pontos)

Durante a formação de um trem estacionado e imóvel (freio acionado) no pátio de manobras, um vagão de massa total m se choca com velocidade constante $\vec{V}_G = u\vec{i}$ imediatamente anterior ao choque. O contacto entre os vagões ocorre no ponto P, coincidente com o centro dos engates tal que $(P-G) = a\vec{i} - b\vec{j}$. Conhecido o coeficiente de restituição e, devido ao aparelho de choque e tração do vagão e desprezando qualquer forma de atrito, pede-se:

a) elabore o diagrama de corpo-livre do vagão; para impacto sem atrito (0,5 pontos)



b) equacione o problema de impacto; Aplicando o TRI e o TMI no vagão:

TRI $\quad m(\vec{V}'_G - \vec{V}_G) = -I\,\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} m(u'-u) = -I \\ m(v'-v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = u - \frac{I}{m} \\ v' = 0 \end{cases}$ (3.1) (0,5 pontos)

TMI $\quad J_{Gz}(\vec{\omega}'-\vec{\omega}) = -I\,b\,\vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{\omega}' = -\dfrac{I\,b}{J_{Gz}}\vec{k} \;\Rightarrow\; \omega' = -\dfrac{I\,b}{J_{Gz}}$ (3.2) (0,5 pontos)

Da formula de campo de velocidades tem-se:

$$\vec{V}_P' = \vec{V}_G' + \vec{\omega}' \wedge (P-G) \;\rightarrow \vec{V}_P' = u'\,\vec{i} - \frac{Ib}{J_{Gz}}\vec{k} \wedge (a\vec{i} - b\vec{j})$$

$$\vec{V}_P' = \left(u - \frac{I}{m}\right)\vec{i} - \frac{Ib}{J_{Gz}}(a\vec{j} + b\vec{i}\,) \;\rightarrow\; \vec{V}_P' = \left(u - \frac{I}{m} - \frac{Ib^2}{J_{Gz}}\right)\vec{i} - \frac{Iab}{J_{Gz}}\vec{j} \qquad (3.3)$$

Formula de restituição de *Newton* $\quad \vec{V}_P' \cdot \vec{i} = -e\vec{V}_P \cdot \vec{i} \;\rightarrow\; \left(u - \dfrac{I}{m} - \dfrac{Ib^2}{J_{Gz}}\right) = -e\,u$ (3.4)

c) determine o impulso $\vec{I}$ aplicado no ponto P do vagão;

Utilizando (3.4): $\quad I = u\dfrac{(1+e)m\,J_{Gz}}{(J_{Gz}+mb^2)} \;\rightarrow\; \boxed{\vec{I} = -u\dfrac{(1+e)m\,J_{Gz}}{(J_{Gz}+mb^2)}\vec{i}}$ (3.5) (0,5 pontos)

d) determine e a velocidade $\vec{V}_G' = u'\,\vec{i} + v'\,\vec{j}$, do centro de massa G do vagão:

Utilizando (3.5) em (3.1) $\quad u' = u\left(1 - \dfrac{(1+e)J_{Gz}}{(J_{Gz}+mb^2)}\right)$

Sabendo que (3.1): $\quad v' = 0 \qquad \boxed{\vec{V}_G' = u\left(1 - \dfrac{(1+e)J_{Gz}}{(J_{Gz}+mb^2)}\right)\vec{i}}$ (0,5 pontos)

e) o vetor de rotação do vagão $\vec{\omega}'$, logo após o choque.

Utilizando (3.5) em (3.2): $\quad \boxed{\omega' = -u\dfrac{m\,b\,(1+e)}{\left(J_{Gz}+mb^2\right)}}$ (0,5 pontos)