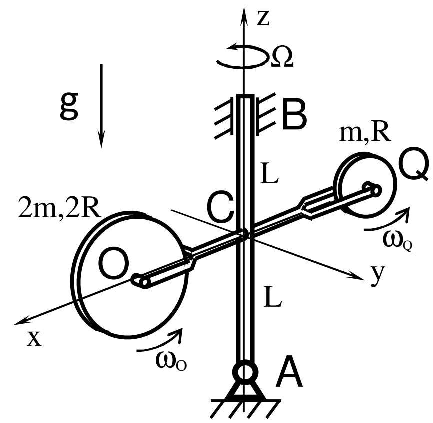
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Mecânica B – PME 2200 – Prova de Recuperação – 22/07/2014
Duração da Prova: 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e/ou outros equipamentos similares)

1ª Questão (4,0 pontos)

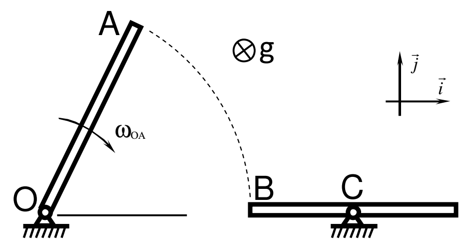
No sistema indicado na figura ao lado, o disco de massa *2m* e raio *2R* gira, em relação ao garfo *OC*, em torno de um eixo paralelo a *y* e passante por *O*. O disco de massa *m* e raio *R* gira, em relação ao garfo *CQ*, em torno de um eixo paralelo a *y* e passante por *Q*. Estas velocidades angulares dos discos são constantes e valem $\vec{\omega}_O = \omega_O \vec{j}$ e $\vec{\omega}_Q = \omega_Q \vec{j}$, respectivamente. Neste mesmo instante, a barra AB, de comprimento *2L* e massa desprezível, gira com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$, constante. Os garfos *OC* e *CQ* têm comprimento *L* e massa desprezível. Pede-se, para a base $C\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, solidária aos garfos *OC* e *CQ*:



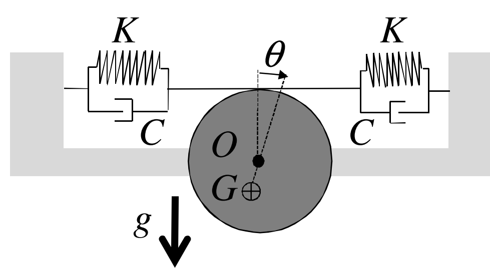
(a) O momento da quantidade de movimento do disco de centro *Q* em relação ao polo *C*
(b) O momento que o disco de centro *Q* aplica sobre o garfo *QC*.
(c) A relação entre ω_O e ω_Q para que as reações em A e B na direção y sejam nulas

2ª Questão (3,0 pontos)

No sistema indicado na figura ao lado, a barra *OA*, de massa *m* e comprimento *L*, encontra-se em um plano horizontal sem atrito e move-se inicialmente com velocidade angular $\vec{\omega}_{OA} = -\omega_{OA}\vec{k}$, constante. Em um dado instante a barra *OA* choca-se com a barra *BC*, de massa *m* e comprimento *L*, inicialmente em repouso. Sabendo que o coeficiente de restituição vale *e*, com *e* > 0, determine o vetor de rotação da barra *BC*, $\vec{\omega}'_{BC}$, no instante imediatamente após o choque.



3ª Questão (3,0 pontos)
Considere o problema idealizado, ilustrado ao lado. O cilindro de massa *m* e raio *R* pode girar em torno de um *eixo fixo*, cujo traço no plano do desenho é indicado por *O*. O cilindro é excêntrico, ou seja, seu centro de massa *G* está fora do centro. A excentricidade, $e = |(G - O)|$, é conhecida. O momento de inércia do cilindro em torno do eixo fixo é J_O.



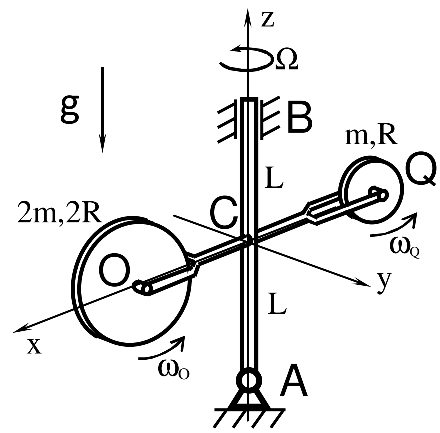
Ao redor do cilindro está enrolada uma correia ideal que é presa a dois conjuntos lineares idênticos, compostos por mola e amortecedor, de constantes *K* e *C*. Considere que não haja escorregamento entre a correia e o cilindro e que a correia esteja sempre tracionada. O ângulo de giro, θ, é nulo quando o centro de massa *G* está na vertical de *O*. Usando θ como coordenada generalizada, pede-se:

(a) Escreva a função de energia cinética do sistema.
(b) Escreva a função de energia potencial do sistema.
(c) Escreva a função Lagrangiana do sistema.
(d) Escreva a função de dissipação de Rayleigh do sistema.
(e) Deduza a equação de movimento do sistema a partir da Equação de Lagrange.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

1ª Questão (4,0 pontos)

No sistema indicado na figura ao lado, o disco de massa *2m* e raio *2R* gira, em relação ao garfo *OC*, em torno de um eixo paralelo a *y* e passante por *O*. O disco de massa *m* e raio *R* gira, em relação ao garfo *CQ*, em torno de um eixo paralelo a *y* e passante por *Q*. Estas velocidades angulares dos discos são constantes e valem $\vec{\omega}_O = \omega_O \vec{j}$ e $\vec{\omega}_Q = \omega_Q \vec{j}$, respectivamente. Neste mesmo instante, a barra AB, de comprimento *2L* e massa desprezível, gira com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$, constante. Os garfos *OC* e *CQ* têm comprimento *L* e massa desprezível. Pede-se, para a base $C\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, solidária aos garfos *OC* e *CQ*:



(a) O momento da quantidade de movimento do disco de centro *Q* em relação ao polo *C*

(b) O momento que o disco de centro *Q* aplica sobre o garfo *QC*.

(c) A relação entre ω_O e ω_Q para que as reações em A e B na direção y sejam nulas

Resolução:

(a) Para o disco de centro *Q*

$\vec{H}_Q = m(G-Q)\wedge\vec{V}_Q + [I_Q]\{\omega_{abs}\}$, em que G=Q

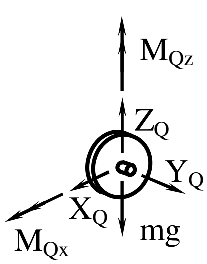
$$\Rightarrow \vec{H}_Q = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_Q \\ \Omega \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_Q = \frac{mR^2}{2}\omega_Q\vec{j} + \frac{mR^2}{4}\Omega\vec{k}$$

Fórmula da mudança de polo:

$\vec{H}_C = \vec{H}_Q + (Q-C)\wedge m\vec{V}_Q$, em que $\vec{V}_Q = \vec{V}_C + \vec{\Omega}\wedge(Q-C) = -\Omega L\vec{j}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_C = \frac{mR^2}{2}\omega_Q\vec{j} + \left(\frac{R^2}{4}+L^2\right)m\Omega\vec{k}}$$ (1,0)

(b) Teorema da quantidade de movimento angular para o disco de centro *Q*



$$\dot{\vec{H}}_Q = m\vec{V}_G\wedge\vec{V}_Q + \vec{M}_Q$$

$$\dot{\vec{H}}_Q = \frac{mR^2}{2}\omega_Q\dot{\vec{j}} + \frac{mR^2}{4}\Omega\dot{\vec{k}}, \text{ em que } \dot{\vec{k}} = \vec{0} \text{ e } \dot{\vec{j}} = \Omega\vec{k}\wedge\vec{j} = -\Omega\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_Q = -\frac{mR^2}{2}\omega_Q\Omega\vec{i}$$

Assim, o momento que o disco de centro *Q* aplica sobre o garfo *QC* é $\boxed{\vec{M}_Q = M_{Qx}\vec{i} = \frac{mR^2}{2}\omega_Q\Omega\vec{i}}$ (1,0)

(c) Aceleração do baricentro do disco de centro Q

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_C + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (Q - C) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (Q - C)\right] \Rightarrow \vec{a}_Q = \Omega L^2 \vec{i}$$

Teorema do movimento do baricentro para o disco de centro Q

$$\begin{cases} X_Q = m\Omega L^2 \\ Y_Q = 0 \\ Z_Q = mg \end{cases}$$

De maneira similar, para o disco de centro O:

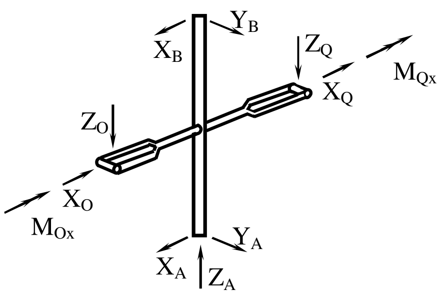
$$\vec{H}_O = 4mR^2\omega_O \vec{j} + 2mR^2\Omega\vec{k},$$

o momento que o disco de centro O aplica sobre o garfo CO é $\vec{M}_O = M_{Ox}\vec{i} = 4mR^2\omega_O\Omega\vec{i}$,

$\vec{a}_O = -\Omega L^2 \vec{i}$ e

$$\begin{cases} X_O = -2m\Omega L^2 \\ Y_O = 0 \\ Z_O = 2mg \end{cases}$$

Diagrama de corpo livre para a estrutura



A estrutura tem massa desprezível, de forma que:

$$\begin{cases} X_A + X_B - X_O - X_Q = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_A = 3mg \end{cases} \quad \text{e}$$

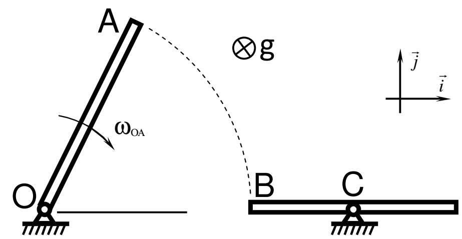
$$\vec{M}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \begin{cases} -2LY_B + \dfrac{mR^2}{2}\omega_Q\Omega + 4mR^2\omega_O\Omega = 0 \\ 2mgL - mgL + 2LX_B + 2m\Omega L^3 - m\Omega L^3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Portanto, para que Y_A e Y_B sejam iguais a zero:

$$\frac{mR^2}{2}\omega_Q\Omega + 4mR^2\omega_O\Omega = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\omega_Q = -8\omega_O} \quad (2,0)$$

2ª Questão (3,0 pontos)

No sistema indicado na figura ao lado, a barra OA, de massa m e comprimento L, encontra-se em um plano horizontal sem atrito e move-se inicialmente com velocidade angular $\vec{\omega}_{OA} = -\omega_{OA}\vec{k}$, constante. Em um dado instante a barra OA choca-se com a barra BC, de massa m e comprimento L, inicialmente em repouso. Sabendo que o coeficiente de restituição no choque vale e, determine o vetor de rotação da barra BC, $\vec{\omega}'_{BC}$, no instante imediatamente após o choque.



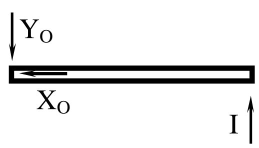
Resolução:

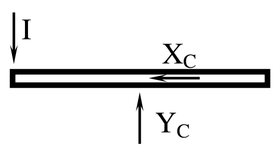
Relações cinemáticas:

Barra OA: $\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega}_{OA} \wedge (A - O) = -\omega_{OA} L\vec{j}$. De maneira similar, $\vec{V}'_A = -\omega'_{OA} L\vec{j}$

Barra BC: $\vec{V}'_B = \vec{V}'_C + \vec{\omega}'_{BC} \wedge (B - C) = -\omega'_{BC}\dfrac{L}{2}\vec{j}$

Diagramas de corpo livre dos impulsos

Barra OA: 

, barra BC: 

Teorema do momento dos impulsos para a barra OA, polo O:

$$\vec{M}_O = \Delta\vec{H}_O \Rightarrow IL = m(G_{OA} - O) \wedge \vec{V}'_O + [I_O]\{\omega'_{OA}\} - m(G_{OA} - O) \wedge \vec{V}_O + [I_O]\{\omega_{OA}\}, \text{ em que } \vec{V}'_O = \vec{V}_O = \vec{0}$$

$$\Rightarrow IL = J_{z_O}(\omega_{OA} - \omega'_{OA})$$

$$\Rightarrow IL = \frac{mL^2}{3}(\omega_{OA} - \omega'_{OA}) \qquad (1)$$

Teorema do momento dos impulsos para a barra BC, polo C:

$$\vec{M}_C = \Delta\vec{H}_C \Rightarrow I\frac{L}{2} = m(G_{BC} - C) \wedge \vec{V}'_C + [I_C]\{\omega'_{BC}\} - m(G_{BC} - C) \wedge \vec{V}_C + [I_C]\{\omega_{BC}\}, \text{ em que } \vec{V}'_C = \vec{V}_C = \vec{0}$$

$$\Rightarrow I\frac{L}{2} = \frac{mL^2}{12}\omega'_{BC} \qquad (2)$$

Coeficiente de restituição:

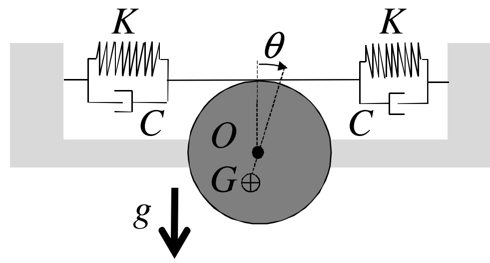
$$V'_B - V'_A = e(V_A - V_B) \Rightarrow -\omega'_{BC}\frac{L}{2} + \omega'_{OA} L = -e\,\omega_{OA} L \qquad (3)$$

Resolvendo o sistema, tem-se que

$$\omega'_{BC} = \frac{\omega_{OA}(e+2)}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}'_{BC} = \frac{\omega_{OA}(e+2)}{2}\vec{k}}$$

3ª Questão (3,0 pontos)

Considere o problema idealizado, ilustrado ao lado. O cilindro de massa m e raio R pode girar em torno de um *eixo fixo*, cujo traço no plano do desenho é indicado por O. O cilindro é excêntrico, ou seja, seu centro de massa G está fora do centro. A excentricidade, $e = |(G - O)|$, é conhecida. O momento de inércia do cilindro em torno do eixo fixo é J_O.



Ao redor do cilindro está enrolada uma correia ideal que é presa a dois conjuntos lineares idênticos, compostos por mola e amortecedor, de constantes K e C. Considere que não haja escorregamento entre a correia e o cilindro e que a correia esteja sempre tracionada. O ângulo de giro, θ, é nulo quando o centro de massa G está na vertical de O. Usando θ como coordenada generalizada, pede-se:

(a) Escreva a função de energia cinética do sistema.
(b) Escreva a função de energia potencial do sistema.
(c) Escreva a função Lagrangiana do sistema.
(d) Escreva a função de dissipação de Rayleigh do sistema.
(e) Deduza a equação de movimento do sistema a partir da Equação de Lagrange.

Resolução:

(a) Como o cilindro gira em torno de um eixo fixo, a energia cinética do sistema é simplesmente dada por:

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 \qquad (1)\ (0{,}5)$$

(b) A função de energia potencial do sistema é composta por uma parcela de natureza elástica e outra de natureza gravitacional:

$$V(\theta) = 2\left(\frac{1}{2} K (R\theta)^2\right) + mge(1 - \cos\theta) = KR^2\theta^2 + mge(1 - \cos\theta)\ . \qquad (2)\ (0{,}5)$$

(c) Assim, a função Lagrangiana fica:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 - \left(KR^2\theta^2 + mge(1 - \cos\theta)\right). \qquad (3)\ (0{,}5)$$

(d) Por sua vez, a função de dissipação de Rayleigh é escrita:

$$R(\dot{\theta}) = 2\left(\frac{1}{2} C (R\dot{\theta})^2\right) = CR^2\dot{\theta}^2 \qquad (4)\ (0{,}5)$$

(e) Por fim a equação de movimento pode ser deduzida da equação de Lagrange apresentada na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0, \qquad (5)\ (0{,}5)$$

decorrendo,

$$J_O \ddot{\theta} + 2CR^2\dot{\theta} + 2KR^2\theta + mge\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad . \qquad (6)\ (0{,}5)$$

Note que para pequenos deslocamentos, a equação fica aproximada, com erro de terceira ordem em θ, por,

$$J_O \ddot{\theta} + 2CR^2\dot{\theta} + \left(2KR^2 + mge\right)\theta = 0 \qquad . \qquad (7)$$