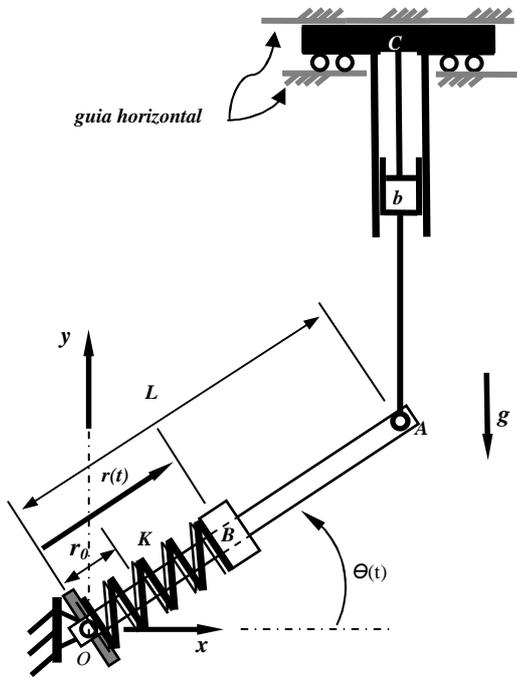




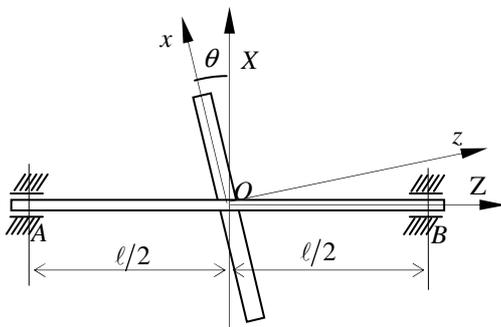
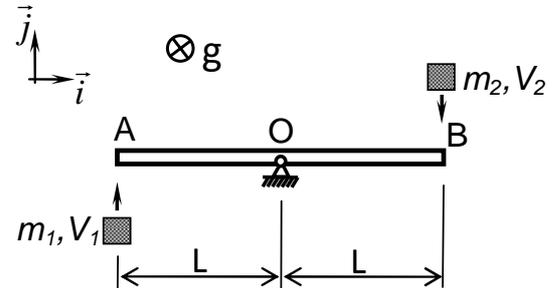
(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e/ou outros equipamentos similares)



QUESTÃO 1 (3,5 pontos). No mecanismo mostrado, a barra esbelta e homogênea OA (massa m e comprimento L) é sustentada por articulações ideais em O (fixa) e em A , onde é ligada à haste de um amortecedor viscoso linear (constante de amortecimento b). O amortecedor é solidário a uma estrutura que desliza sem atrito no interior de uma guia horizontal e que mantém AC sempre paralela à direção Oy . A mola linear ideal (constante elástica K e comprimento livre r_0) é montada ao redor da barra e desliza sobre ela sem atrito mantendo-se sempre em contato com a luva B (massa M) e com o batente solidário à barra em O . A luva B também desliza sem atrito sobre a barra OA . Admite-se, ainda, que r_0 e L são tais que a luva nunca atinja a extremidade A da barra e que a mola nunca se comprima totalmente. Pedem-se, considerando os parâmetros fornecidos e as coordenadas generalizadas r e θ :

- expressar a energia potencial do sistema;
- expressar a energia cinética do sistema;
- expressar a função dissipação de Rayleigh;
- obter as equações diferenciais do movimento utilizando a abordagem de Lagrange.

QUESTÃO 2 (3,0 pontos). No sistema mostrado na figura, a barra AB possui massa M e comprimento $2L$ e encontra-se inicialmente em repouso sobre um plano horizontal. Em um dado instante, um bloco de massa m_1 atinge a barra no ponto A , com velocidade $V_1 \vec{j}$ e, simultaneamente, um bloco de massa m_2 atinge a barra no ponto B , com velocidade $-V_2 \vec{j}$. Supondo que ambos os choques foram perfeitamente anelásticos, determine o vetor rotação instantânea da barra imediatamente após a ocorrência desses eventos.



QUESTÃO 3 (3,5 pontos). Devido a um defeito de montagem, a polia de massa m e raio r é ajustada ao seu eixo de rotação AB fazendo um pequeno ângulo θ com a direção perpendicular a AB . Em seguida, o eixo AB é posto a girar com velocidade angular ω constante. Considere $OXYZ$ como um sistema de eixos fixos e $Oxyz$ como um sistema de eixos ligados à polia, conforme indicado na figura. Nessas condições, pede-se determinar:

- a matriz de inércia da polia referida ao sistema de eixos fixos $OXYZ$;
- o binário giroscópico aplicado pelos mancais ao eixo da polia;
- as reações nos mancais A e B .



RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

(a) Os vetores posição e velocidade do ponto B são dados por:

$$\begin{aligned}(B-O) &= r(\cos\vec{\theta}\vec{i} + \sin\vec{\theta}\vec{j}) \\ \vec{v}_B &= \dot{r}(\cos\vec{\theta}\vec{i} + \sin\vec{\theta}\vec{j}) + r\dot{\theta}(-\sin\vec{\theta}\vec{i} + \cos\vec{\theta}\vec{j}) \\ \vec{v}_B &= (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\vec{i} + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\vec{j}\end{aligned}$$

A energia cinética fica:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M|\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_O|^2 + m\vec{v}_O \cdot (\dot{\vec{\theta}} \wedge (G-O)) + \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2 \\ T &= \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2\end{aligned}\quad (1,0)$$

(b) A energia potencial é (tomando-se Ox como posição de referência para a barra):

$$V = V_{el} + V_g = \frac{1}{2}K(r-r_0)^2 + g\sin\theta\left(Mr + m\frac{L}{2}\right)\quad (1,0)$$

(c) Para obter a função dissipação de Rayleigh, deve-se calcular a velocidade do ponto A :

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_O + \dot{\vec{\theta}} \wedge (A-O) = \dot{\vec{\theta}} \wedge L(\cos\vec{\theta}\vec{i} + \sin\vec{\theta}\vec{j}) \\ \vec{v}_A &= \dot{\theta}L(\cos\vec{\theta}\vec{j} - \sin\vec{\theta}\vec{i})\end{aligned}$$

Como AC é sempre paralela a Oy ,

$$R = \frac{1}{2}b(\vec{v}_A \cdot \vec{j})^2 = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2L^2\cos^2\theta\quad (0,5)$$

(d) A função Lagrangeana é:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K(r-r_0)^2 - g\sin\theta\left(Mr + m\frac{L}{2}\right)$$

Etapas intermediárias:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= M\dot{r} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= M\ddot{r} & \frac{\partial L}{\partial r} &= Mr\dot{\theta}^2 - K(r-r_0) - Mg\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= Mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \left(Mr^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)\ddot{\theta} + 2Mr\dot{\theta} & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\left(Mr + m\frac{L}{2}\right)g\cos\theta - \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -bL^2\dot{\theta}\cos^2\theta\end{aligned}$$

Obtenção das equações de movimento:

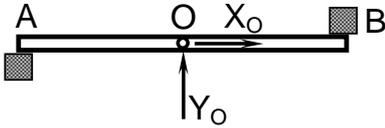
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = 0 \Rightarrow M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + K(r-r_0) + Mg\sin\theta = 0\quad (equação para r)\quad (0,5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \left(Mr^2 + \frac{1}{3}mL^2\right)\ddot{\theta} + 2Mr\dot{\theta} + \left(Mr + m\frac{L}{2}\right)g\cos\theta + bL^2\dot{\theta}\cos^2\theta = 0\quad (equação para \theta)\quad (0,5)$$



RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

Diagrama de corpo livre para o conjunto composto pela barra e pelas duas massas



Relações cinemáticas para a barra no instante imediatamente após o choque

$$\vec{V}_A' = \vec{V}_O' + \omega' \wedge (A - O) \Rightarrow \vec{V}_A' = \omega' L \vec{j}, \text{ similarmente } \vec{V}_B' = -\omega' L \vec{j}$$

Teorema do momento dos impulsos para o conjunto

$$\vec{M}_O = \vec{H}_O' - \vec{H}_O = \vec{0},$$

em que

$$\vec{H}_O' = (A - O) \wedge m_1 \vec{V}_A' + (B - O) \wedge m_2 \vec{V}_B' - J_z \omega' \vec{k} \Rightarrow \vec{H}_O' = \left(-m_1 L^2 \omega' - m_2 L \omega' - \frac{M(2L)^2}{12} \omega' \right) \vec{k}$$

$$\text{e } \vec{H}_O = (A - O) \wedge m_1 \vec{V}_1 + (B - O) \wedge m_2 \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{H}_O = (-m_1 L V_1 - m_2 L V_2) \vec{k}$$

$$\Rightarrow \left(-m_1 - m_2 - \frac{M}{3} \right) \omega' L^2 = (-m_1 V_1 - m_2 V_2) L \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}' = -\frac{1}{L} \left(\frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2 + M/3} \right) \vec{k}}$$



RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

A matriz de inércia da polia referida aos eixos a ela ligados $Oxyz$, é:

$$[J]_{Oxyz} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de inércia da polia referida ao sistema de eixos fixos $OXYZ$, é dada por:

$$[J]_{OXYZ} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4}(1 + \sin^2 \theta) & 0 & \frac{mr^2}{4} \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ \frac{mr^2}{4} \sin \theta \cos \theta & 0 & \frac{mr^2}{4}(1 + \cos^2 \theta) \end{bmatrix}$$

Resposta (a) (1,0 ponto)

Aplicando-se o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento à polia ligada ao eixo AB , tem-se:

$$\vec{M}_O = [J_O] \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \{ [J_O] \cdot \vec{\omega} \} = \vec{0} + \omega \vec{K} \wedge \left\{ \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4}(1 + \sin^2 \theta) & 0 & \frac{mr^2}{4} \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ \frac{mr^2}{4} \sin \theta \cos \theta & 0 & \frac{mr^2}{4}(1 + \cos^2 \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = \omega \vec{K} \wedge \left(\frac{mr^2}{4} \sin \theta \cos \theta \omega \vec{i} + \frac{mr^2}{4} (1 + \cos^2 \theta) \omega \vec{K} \right) = \frac{mr^2}{4} \sin \theta \cos \theta \omega^2 \vec{j} \text{ (binário giroscópico ativo)}$$

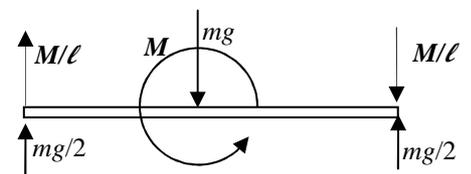
Portanto, o binário giroscópico aplicado pelos mancais ao eixo da polia, é:

$$\vec{G} = -\frac{mr^2}{4} \sin \theta \cos \theta \omega^2 \vec{j}$$

Resposta (b) (1,5 ponto)

Considerando-se diagrama de corpo livre do eixo AB (figura ao lado), as reações nos mancais A e B são dadas por:

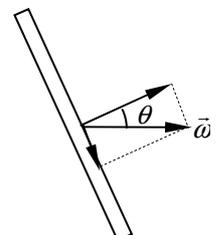
$$R_A = \frac{mg}{2} + \frac{mr^2}{4\ell} \sin \theta \cos \theta \omega^2 \vec{j} \text{ e } R_B = \frac{mg}{2} - \frac{mr^2}{4\ell} \sin \theta \cos \theta \omega^2 \vec{j}$$



Resposta (c) (1,0 ponto)

OBSERVAÇÃO: RESOLUÇÃO ALTERNATIVA DO ITEM b

Calcula-se o Momento da Quantidade de Movimento da polia referido ao sistema de eixos $Oxyz$, ou seja:





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

$$[H_O] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega \cos \theta \\ 0 \\ \omega \sin \theta \end{bmatrix} = -\frac{mr^2}{4} \omega \cos \theta \vec{i} + \frac{mr^2}{2} \omega \sin \theta \vec{k}$$

Aplica-se o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento referido ao mesmo sistema de eixos $Oxyz$, resultando:

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O = \vec{\omega} \wedge \vec{H}_O = (-\omega \cos \theta \vec{i} + \omega \sin \theta \vec{k}) \wedge \left(-\frac{mr^2}{4} \omega \cos \theta \vec{i} + \frac{mr^2}{2} \omega \sin \theta \vec{k} \right) = \frac{mr^2}{4} \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{j} = \frac{mr^2}{4} \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{j}$$

Obtém-se, finalmente, o binário giroscópico aplicado à polia, ou seja:

$$\vec{G} = -\frac{mr^2}{4} \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{j}$$