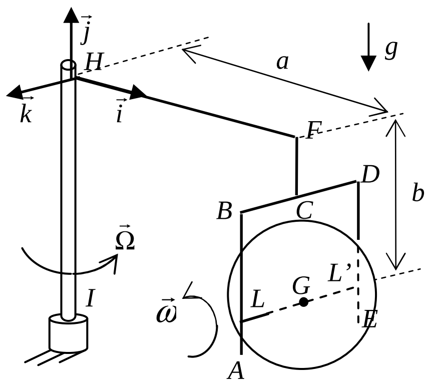
Mecânica – B – PME 2200 –Prova de Recuperação – 17/07/2012
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos)

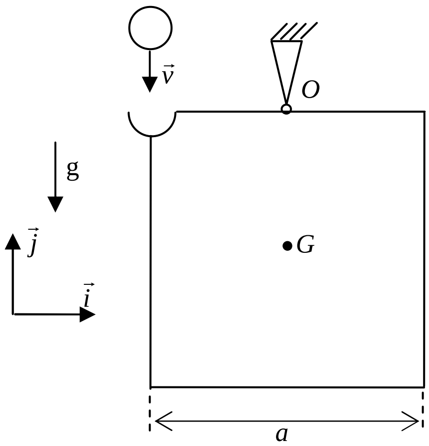
QUESTÃO 1 (3,5 pontos). Uma esfera de raio r e massa m gira com velocidade angular relativa constante ω em torno do mancal *LL'*, solidário ao garfo *ABCDEF* de massa desprezível e passante pelo baricentro *G* da esfera. O braço *HF*, de massa desprezível, sustenta o garfo e gira em torno do eixo *HI* com velocidade angular constante Ω. Utilizando a base $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ solidária ao plano *HIF*, pede-se determinar:



(a) o vetor rotação instantânea da esfera;
(b) a matriz de inércia da esfera em relação ao pólo *G*;
(c) o momento da quantidade de movimento $\vec{H}_G$ da esfera em relação ao pólo *G*;
(d) o binário aplicado pela esfera ao mancal *LL'*;
(e) a força aplicada pela esfera ao mancal *LL'*.

<u>Dado</u>: momento central de inércia de uma esfera de raio r e massa m: $J_G = \frac{2}{5}mr^2$

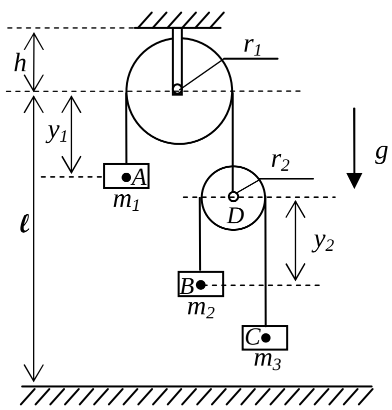
QUESTÃO 2 (3,5 pontos). Em torno de um dos vértices de uma placa quadrada de massa m e lado a há um chanfro ao qual se prende uma pequena calota esférica de massa desprezível, conforme indicado na figura. A placa é articulada em um ponto *O* alinhado com o seu baricentro *G* (situado, por hipótese, na intersecção das diagonais do quadrado de lado a) segundo a direção vertical. Em um dado instante, estando a placa em repouso, uma pequena esfera de massa $m/12$, com velocidade $\vec{v} = -v\vec{j}$, é colhida pela calota. Supondo que a colisão tenha sido perfeitamente plástica, pede-se determinar:



(a) a velocidade angular ω' da placa imediatamente após o impacto;
(b) a velocidade $\vec{v}'_G$ do baricentro da placa imediatamente após o impacto;
(c) o impulso reativo $\vec{I}_O$ na articulação O;

<u>Dado</u>: momento de inércia da placa <u>imediatamente antes</u> do impacto: $J_{Gz} = \frac{1}{6}ma^2$

QUESTÃO 3 (3,0 pontos). Por uma polia de raio r_1 passa um cabo inextensível em cujas extremidades ligam-se uma massa m_1 e uma polia de raio r_2. Esta última, por sua vez, transporta duas massas m_2 e m_3 por meio de um cabo inextensível, conforme ilustrado na figura. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são, respectivamente, os baricentros das massas m_1, m_2, m_3 e da polia de raio r_2. Desprezando-se as massas das polias e dos cabos, admitindo-se que não exista atrito nos contactos destes com as polias e utilizando-se y_1 e y_2 como coordenadas generalizadas, pede-se determinar:



(a) a energia cinética do sistema;
(a) as forças generalizadas atuantes no sistema;
(b) as equações de movimento do sistema.

QUESTÃO 1. Resolução

O vetor rotação instantâneo da esfera, é:

$$\vec{\omega}_{abs} = \Omega\vec{j} + \omega\vec{k}$$

Resposta a: 0,5 pontos

A matriz de inércia da esfera, referida ao pólo *G*, é:

$$[J_G] = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix}$$

Resposta b: 0,5 pontos

O momento da quantidade de movimento da esfera, referido ao pólo *G*, é:

$$\vec{H}_G = [J_G]\vec{\omega}_{abs} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{2}{5}mr^2\Omega\vec{j} + \frac{2}{5}mr^2\omega\vec{k}$$

Resposta c: 0,5 pontos

Aplicando-se o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento à esfera, obtém-se:

$$\vec{M}_G = \frac{d}{dt}\vec{H}_G\Big|_{Gxyz} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G = \vec{0} + \Omega\vec{j} \wedge \left(\frac{2}{5}mr^2\Omega\vec{j} + \frac{2}{5}mr^2\omega\vec{k}\right) = \frac{2}{5}mr^2\Omega\omega\vec{i}$$

Logo, o binário giroscópico $\vec{G}$ aplicado pela esfera ao mancal, é:

$$\vec{G} = -\frac{2}{5}mr^2\Omega\omega\vec{i}$$

Resposta d: 1,0 ponto

A aceleração do baricentro da esfera é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{Grel} + \vec{a}_{Garr} + \vec{a}_{GCor} = \vec{0} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} \wedge (G-H) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (G-H)] = \vec{0} + \vec{0} \wedge (G-H) + \Omega\vec{j} \wedge [\Omega\vec{j} \wedge (G-H)]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_G = \Omega\vec{j} \wedge [\Omega\vec{j} \wedge (a\vec{i} - b\vec{j})] = -\Omega^2 a\vec{i}$$

Aplicando-se o Teorema do Movimento do Baricentro à esfera, tem-se:

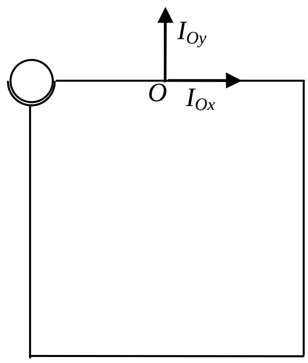
$$\vec{R}^{ext} = m\vec{a}_G = -m\Omega^2 a\vec{i} + mg\vec{j}$$

Logo, a força aplicada pela esfera ao mancal *LL'*, é:

$$\vec{F} = m\Omega^2 a\vec{i} - mg\vec{j}$$

Resposta e: 1,0 ponto

QUESTÃO 2. Resolução



No instante do choque, o sistema 'placa+partícula' fica sujeito aos esforços impulsivos externos ilustrados no diagrama ao lado:

Aplicando-se o Teorema dos Momentos dos Impulsos ao sistema 'placa+partícula', relativamente ao pólo O, resulta

$$\Delta\vec{H}_O = \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}.$$

Portanto, o momento da quantidade de movimento do sistema 'placa + partícula' se conserva durante a colisão.

Imediatamente antes do choque a placa está parada e a partícula se move com velocidade $-v\vec{j}$, de modo que

$$\vec{H}_O = \frac{a}{2}\vec{i} \wedge \left(-\frac{m}{12}v\vec{j}\right) = \frac{mva}{24}\vec{k}.$$

Como, por hipótese, o choque é perfeitamente plástico, a massa da partícula se incorpora à da placa durante a colisão, de modo que o seu momento de inércia assume o valor

$$J'_{Oz} = \frac{1}{6}ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{12}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{21}{48}ma^2.$$

Portanto, imediatamente após o choque, o momento da quantidade de movimento do sistema material será

$$\vec{H}'_O = J'_{Oz}\omega'\vec{k} = \frac{21ma^2}{48}\omega'\vec{k}.$$

Da conservação do momento da quantidade de movimento do sistema 'placa+partícula' resulta:

$$\frac{mva}{24} = \frac{21ma^2}{48}\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{2v}{21a}$$

Resposta a: 1,5 pontos

A velocidade do baricentro da placa imediatamente após a colisão será:

$$v'_G = \omega'\vec{k} \wedge (G-O) = \frac{2v}{21a}\vec{k} \wedge \left(-\frac{a}{2}\vec{j}\right) = \frac{v}{21}\vec{i}$$

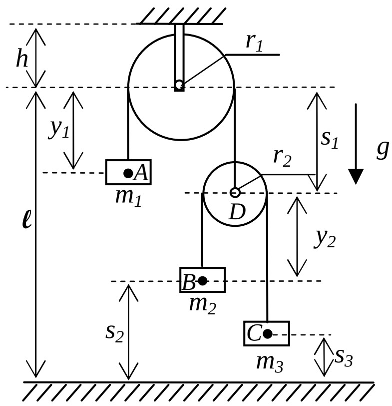
Resposta b: 0,5 pontos

Aplicando-se o Teorema da Resultante dos Impulsos ao sistema 'placa+partícula', tem-se:

$$\vec{I}_O = \Delta\vec{Q} = \left(m + \frac{m}{12}\right)\frac{v}{21}\vec{i} - \left(-\frac{mv}{12}\vec{j}\right) = \frac{mv}{12}\left(\frac{13}{21}\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Resposta c: 1,5 pontos

QUESTÃO 3. Resolução



Utilizando-se as coordenadas auxiliares s_2 e s_3, indicadas na figura ao lado, a energia cinética do sistema material constituído pelas três massas m_1, m_2 e m_3, é:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{s}_3^2 \qquad (1)$$

Como os fios são inextensíveis, os movimentos das massas ficam restritos pelas seguintes equações vinculares:

$$s_1 + \pi r_1 + y_1 = c_1 \qquad (2)$$

$$s_2 + y_2 + s_1 = \ell \qquad (3)$$

$$y_2 + \pi r_2 + \ell - (s_1 + s_3) = c_2 \qquad (4)$$

Das equações (2) e (3) resulta:

$$s_2 + y_2 + c_1 - \pi r_1 - y_1 = \ell \qquad (5)$$

Derivando-se a equação (2), obtém-se:

$$\dot{s}_1 = -\dot{y}_1 \qquad (6)$$

Derivando-se a equação (5) obtém-se:

$$\dot{s}_2 = \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \qquad (7)$$

Derivando-se a equação (4), obtém-se:

$$\dot{y}_2 - \dot{s}_1 - \dot{s}_3 = 0 \qquad (8)$$

Substituindo-se (6) em (8), resulta:

$$\dot{s}_3 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \qquad (9)$$

Substituindo-se (7) e (9) em (1), resulta:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 \qquad (10)$$

Resposta a: 1,0 ponto

Para determinar a força generalizada F_{y_1} expressa-se o trabalho virtual realizado pelas forças externas admitindo-se um deslocamento virtual δ_{y_1} de y_1 e mantendo-se y_2 constante. Assim, resulta:

$$\delta W_{y_1} = m_1 g \delta_{y_1} - (m_2 + m_3) g \delta_{y_1} \qquad (11)$$

Analogamente, determina-se a força generalizada F_{y_2} expressando-se o trabalho virtual realizado pelas forças externas admitindo-se um deslocamento virtual δ_{y_2} de y_2 e mantendo-se y_1 constante. Assim, obtém-se:

$$\delta W_{y_2} = (m_2 - m_3) g \delta_{y_2} \qquad (12)$$

Portanto, as forças generalizadas atuantes no sistema, são:

$$F_{y_1} = (m_1 - m_2 - m_3) g \qquad \text{e} \qquad F_{y_2} = (m_2 - m_3) g$$

Resposta b: 1,0 ponto

Aplicando-se as equações de Lagrange ao sistema material, obtêm-se:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{y}_2 = (m_1 - m_2 - m_3) g$$

$$(m_3 - m_2)\ddot{y}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{y}_2 = (m_2 - m_3) g$$

Resposta c: 1,0 ponto