ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

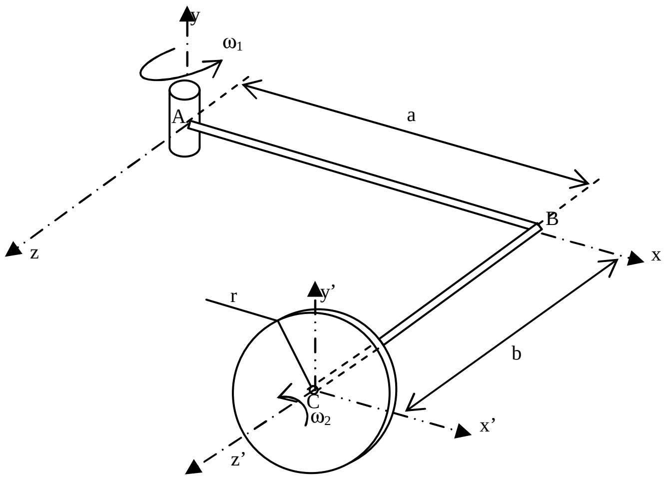
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

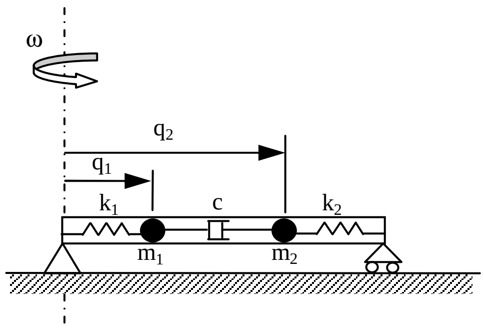
PME 2200 – MECÂNICA B – Prova de recuperação – 26 de julho de 2011
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

QUESTÃO 1 (3,5 pontos). Um disco de raio r e massa m gira com velocidade angular constante ω_2 em relação ao eixo ABC, de massa desprezível. Este, por sua vez, gira com velocidade angular constante ω_1 em torno do eixo Ay. Nessas condições, pede-se determinar:

(a) a matriz de inércia do disco em relação ao pólo C;
(b) a força resultante aplicada ao mancal A;
(c) o momento resultante aplicado ao mancal A.

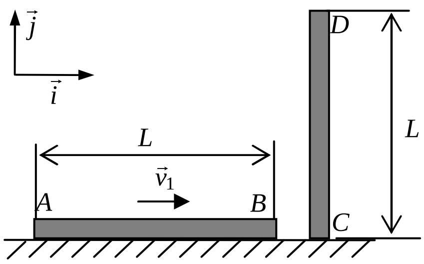


QUESTÃO 2 (3,5 pontos). Um tubo fino contém duas massas concentradas m_1 e m_2 conectadas entre si por um amortecedor de constante de amortecimento c, e ligadas ao tubo por meio de molas de constantes elásticas k_1 e k_2 . Os comprimentos naturais das molas 1 e 2 correspondem a $q_1 = l_1$ e $q_2 = l_2$, respectivamente. As massas deslizam no interior do tubo sem atrito. O tubo gira com velocidade angular constante ω em torno do eixo z. Considerando apenas o movimento das massas m_1 e m_2, e adotando como coordenadas generalizadas as distâncias q_1 e q_2, indicadas na figura, pede-se determinar, para o sistema constituído pelas massas m_1 e m_2:



(a) a energia cinética;
(b) a energia potencial e o potencial dissipativo de Rayleigh;
(c) as equações do movimento das massas m_1 e m_2.

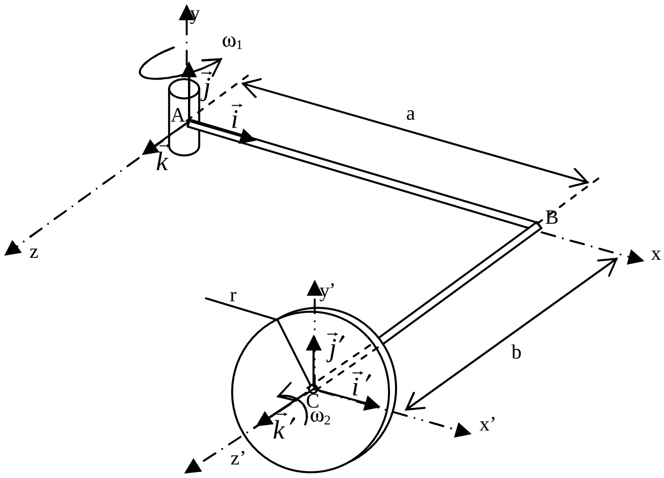
QUESTÃO 3 (3,0 pontos). Uma barra delgada CD de comprimento L e massa m apóia-se perpendicularmente num piso horizontal sem atrito. Uma outra barra AB, idêntica a CD, movendo-se sobre o piso com velocidade $\mathbf{v_1}$ atinge a extremidade C da barra vertical como indicado na figura. Supondo que o coeficiente de restituição e para o material constituinte das barras vale 0,5, determinar:



(a) os diagramas de corpo livre para as barras AB e CD no instante do choque;
(b) a velocidade da barra AB imediatamente após o choque;
(c) a velocidade angular da barra CD e a velocidade de seu centro de massa imediatamente após o choque.

RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1:



Descreveremos o movimento do disco utilizando um sistema de eixos móvel *Cx'y'z'* que realiza movimento de rotação em torno do sistema de referência fixo *Axyz* com velocidade angular descrita pelo vetor rotação de arrastamento $\omega_1 \vec{j}$.

A matriz de inércia do disco, referida ao seu baricentro *C* e descrita nas coordenadas *x'y'z'* é dada por:

$$[J_C] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix}$$ ***Resposta (a-1)***

O vetor rotação instantâneo do disco é dado por:

$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{j}' + \omega_2 \vec{k}'$ ***Resposta (a-2)***

O momento da quantidade de movimento do disco, referido ao pólo *C* e expresso em termos dos eixos *x'y'z'* é dado por:

$$\vec{H}_C = [J_C]\cdot[\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{4}\omega_1 \vec{j}' + \frac{mr^2}{2}\omega_2 \vec{k}'$$

Aplicando-se o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento ao disco, referido ao pólo *C*, tem-se:

$$\vec{M}_C = \frac{d}{dt}\vec{H}_C\Big|_{xyz} = \frac{d}{dt}\vec{H}_C\Big|_{x'y'z'} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_C$$

Notando que: $\vec{\omega}_{arr} = \omega_1 \vec{j}$, que $\vec{j}$ é sempre paralelo a $\vec{j}'$ e que $\frac{d}{dt}\vec{H}_C\Big|_{x'y'z'} = 0$, resulta:

$$\vec{M}_C = \omega_1 \vec{j}' \wedge \vec{H}_C = \omega_1 \vec{j} \wedge \left(\frac{mr^2}{4}\omega_1 \vec{j}' + \frac{mr^2}{2}\omega_2 \vec{k}' \right) = \frac{mr^2}{2}\omega_1\omega_2 \vec{i}'$$

A aceleração absoluta do baricentro do disco é dada por:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C-A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C-A)] = \vec{0} + \wedge (C-A) + \omega_1 \vec{j}' \wedge [\omega_1 \vec{j}' \wedge (C-A)] = \omega_1 \vec{j}' \wedge [\omega_1 \vec{j}' \wedge (a\vec{i}' + b\vec{k}')]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = -a\omega_1^2 \vec{i}' - b\omega_1^2 \vec{k}'$$

As reações no mancal *A* são devidas ao peso próprio do disco, à força de inércia associada ao movimento do seu baricentro em torno de *A* e ao binário giroscópico devido ao movimento de rotação do disco em torno do eixo *z'*, o que totaliza:

- uma força resultante $\vec{R} = ma\omega_1^2\vec{i}\,' - mg\vec{j}\,' + mb\omega_1^2\vec{k}\,'$ **Resposta (b)**
- e um momento resultante $\vec{M}_A = \left(\dfrac{mr^2}{2}\omega_1\omega_2 + mag\right)\vec{i}\,' - mbg\vec{k}\,'$ **Resposta (c)**

QUESTÃO 2:

Expressaremos a energia cinética do sistema em termos de velocidades generalizadas descritas em um sistema de coordenadas cilíndricas (r,θ,z):

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(v_{1r}^2 + v_{1\theta}^2 + v_{1z}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(v_{2r}^2 + v_{2\theta}^2 + v_{2z}^2\right) = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{z}_2^2\right)$$

As equações vinculares que relacionam as coordenadas generalizadas q_1 e q_2 com as coordenadas cilíndricas r, θ e z, são:

$$\begin{aligned} r_1 &= q_1 & \qquad & & r_2 &= q_2 \\ \theta_1 &= \omega t & & \text{e} & \theta_2 &= \omega t \\ z_1 &= 0 & & & z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Derivando-se essas equações, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \dot{q}_1 & \qquad & & \dot{r}_2 &= \dot{q}_2 \\ \dot{\theta}_1 &= \omega & & \text{e} & \dot{\theta}_2 &= \omega \\ \dot{z}_1 &= 0 & & & \dot{z}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Com isso, a energia cinética do sistema se expressa como:

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{q}_1^2 + q_1^2\omega^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{q}_2^2 + r_2^2\omega^2\right)$$ **Resposta (a)**

A energia potencial do sistema corresponde apenas à energia de deformação das molas, ou seja:

$$V = \frac{k_1}{2}(q_1 - l_1)^2 + \frac{k_2}{2}(q_2 - l_2)^2$$ **Resposta (b-1)**

O potencial dissipativo de Rayleigh é dado por:

$$R = \frac{c}{2}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2$$

Resposta (b-2)

O lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{q}_1^2 + q_1^2\omega^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{q}_2^2 + r_2^2\omega^2\right) - \frac{k_1}{2}(q_1 - l_1)^2 - \frac{k_2}{2}(q_2 - l_2)$$

De posse das funções L e R, aplicamos as equações de Lagrange a cada um dos dois graus de liberdade do sistema. (Notemos que o movimento de rotação em torno do eixo z é descrito por uma equação vincular dependente do tempo, com a forma: $\theta = \theta_0 + \omega t$)

Para a coordenada generalizada q_1, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_1\dot{q}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = m_1\ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = m_1 q_1\omega^2 - k_1(q_1 - l_1)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = -c(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$$

Para a coordenada generalizada q_2, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2\dot{q}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2\ddot{q}_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 q_2 \omega^2 - k_2(q_2 - l_2)$$
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = c(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$$

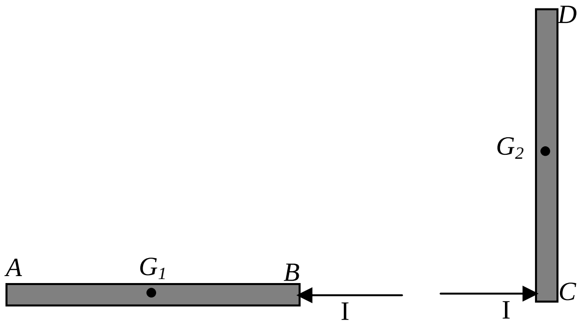
Dessa forma, resultam as duas equações do movimento do sistema de massas m_1 e m_2:

$$m_1\ddot{q}_1 - c(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + k_1(q_1 - l_1) - m_1 q_1 \omega^2 = 0$$
$$m_2\ddot{q}_2 + k_2(q_2 - l_2) + c(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - m_2 q_2 \omega^2 = 0$$

Resposta (c)

QUESTÃO 3:

Os diagramas de corpo livre para as barras no instante do choque são apresentados na figura abaixo:



Resposta (a)

Aplicando-se à barra *AB* o Teorema da Resultante dos Impulsos, tem-se:

$$m(\vec{v}'_{G1} - \vec{v}_{G1}) = -\vec{I} \Rightarrow m(v'_{G1} - v_1) = -I$$
$$\Rightarrow \vec{v}'_{G1} = \left(v_1 - \frac{I}{m}\right)\vec{i} \qquad (1)$$

Aplicando-se à barra *CD* o Teorema da Resultante dos Impulsos, tem-se:

$$m(\vec{v}'_{G2} - \vec{v}_{G2}) = \vec{I} \Rightarrow m(v'_{G1} - 0) = I$$
$$\Rightarrow \vec{v}'_{G2} = \frac{I}{m}\vec{i} \qquad (2)$$

Aplicando-se à barra *CD* o Teorema do Momento dos Impulsos, tem-se:

$$J_{G2}(\vec{\omega}'_2 - \vec{\omega}_2) = \vec{M}_{G2}$$
$$\Rightarrow \frac{mL^2}{12}\vec{\omega}'_2 = (C - G_2) \wedge I\vec{i} = \frac{L}{2}I\vec{k}$$
$$\Rightarrow \vec{\omega}'_2 = \frac{6}{mL}I\vec{k} \qquad (3)$$

A relação entre as velocidades de aproximação e afastamento dos pontos de contacto das duas barras no ato da colisão, é dada por:

$$\vec{v}'_C - \vec{v}'_B = -e(\vec{v}_C - \vec{v}_B) \Rightarrow \vec{v}'_C - \vec{v}'_{G1} = -\frac{1}{2}(\vec{0} - \vec{v}_1) = \frac{\vec{v}_1}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}'_C = \vec{v}'_{G1} + \frac{v_1\vec{i}}{2} \tag{4}$$

A velocidade do baricentro da barra *CD* imediatamente após o choque é expressa por:

$$\vec{v}'_{G2} = \vec{v}'_C + \vec{\omega}'_2 \wedge (G_2 - C) = \vec{v}'_C + \omega'_2\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v}'_{G2} = \vec{v}'_C - \vec{\omega}_2 \frac{L}{2}\vec{i} \tag{5}$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1) a (5), obtêm-se:

$$\vec{I} = \frac{3}{10}mv_1\vec{i}$$

$$\vec{v}'_{G1} = \frac{7}{10}mv_1\vec{i}$$ ***Resposta (b)***

$$\vec{v}'_{G2} = \frac{3}{10}v_1\vec{i} \qquad \text{e} \qquad \vec{\omega}'_2 = \frac{18v_1}{10L}\vec{k}$$ ***Resposta (c)***