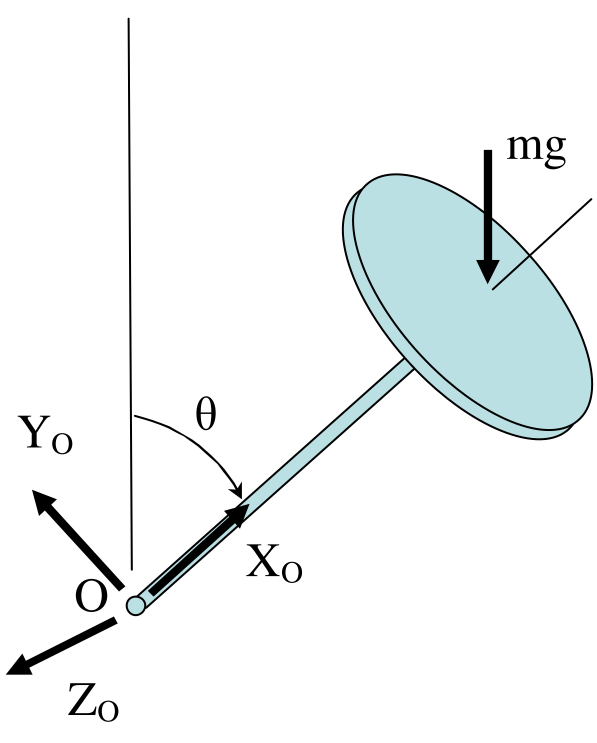
PME 2200 - 1º Semestre/2009
Prova de Recuperação - 21/07/2009
Gabarito

Questão 1 (3,0): O disco homogêno de massa “m” e raio “R”, solidário à barra de massa desprezível, comprimento “L” e articulada a uma base fixa em O, tem movimento de rotação própria com velocidade angular constante “ω” e movimento de precessão, em torno do eixo vertical, com velocidade angular também constante “Ω”, conforme indicado na figura. Pede-se determinar, utilizando os versores da base indicada na figura:

a) o diagrama de corpo livre do conjunto;
b) o vetor de rotação absoluto do conjunto e a quantidade de movimento angular do conjunto em relação ao pólo O;
c) a relação que deve ser satisfeita entre “ω” e “Ω” na situação em que $\theta = \pi/2$ e $L = 2R$;
d) as reações externas na articulação em O, na situação do item d) acima;
e) adicionalmente, discorra sobre o movimento conforme descrito no item d) acima, isto é, $\theta = \pi/2$ e $L = 2R$, quando na ausência do campo gravitacional indicado.



(0,5)

$$\boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{i} + \Omega\left(\cos\theta\vec{i} + \mathrm{sen}\theta\vec{j}\right)}$$ (0,3)

$$\vec{H}_O = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4}+mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4}+mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega+\Omega\cos\theta \\ \Omega\text{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{H}_O = \frac{mR^2}{2}(\omega+\Omega\cos\theta)\vec{i} + \left(\frac{mR^2}{4}+mL^2\right)\Omega\text{sen}\theta\vec{j}} \quad (0{,}3)$$

TMA polo em O: $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O$

$$\dot{\vec{i}} = \left(\Omega\cos\theta\vec{i} + \Omega\text{sen}\theta\vec{j}\right)\wedge\vec{i} = -\Omega\text{sen}\theta\vec{k} \qquad \dot{\vec{j}} = \left(\Omega\cos\theta\vec{i} + \Omega\text{sen}\theta\vec{j}\right)\wedge\vec{j} = \Omega\cos\theta\vec{k}$$

(0,3)

$$\dot{\vec{H}}_O = \left[-\frac{mR^2}{2}(\omega+\Omega\cos\theta)\Omega\text{sen}\theta + \left(\frac{mR^2}{4}+mL^2\right)\Omega^2\text{sen}\theta\cos\theta\right]\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \left[-\frac{mR^2}{2}\omega\Omega\text{sen}\theta + \left(mL^2-\frac{mR^2}{4}\right)\Omega^2\text{sen}\theta\cos\theta\right]\vec{k}$$

$\vec{M}_O = -mgL\text{sen}\theta$ (0,3)

$$-\frac{mR^2}{2}\omega\Omega\text{sen}\theta + \left(mL^2-\frac{mR^2}{2}+\right)\Omega^2\cos\theta\text{sen}\theta = -mgL\text{sen}\theta$$

p/ $\theta = \pi/2$ e $L = 2R$ ➔ $\boxed{\omega\Omega = \frac{4g}{R}}$ (0,3)

TMB: $m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$

$\vec{a}_G = -\Omega^2(2R)\vec{i}$

$\vec{R}^{ext} = X_O\vec{i} - (Y_O - mg)\vec{j} + Z_O\vec{k}$

➔ $\boxed{X_O = -2mR\Omega^2}$ $\boxed{Y_O = mg}$ $\boxed{Z_O = 0}$ (0,5)

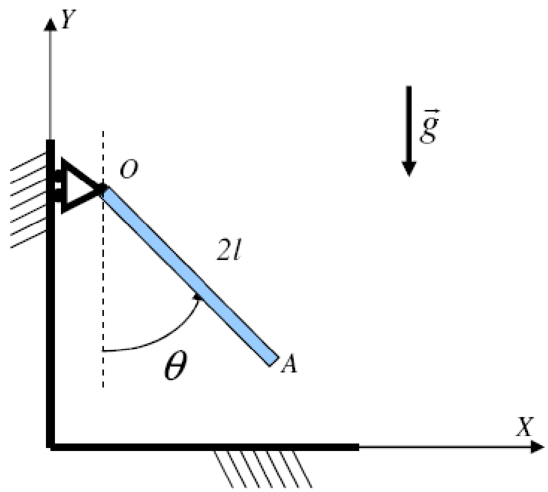
Na ausência de campo gravitacional, g = 0 ➔ $\vec{M}_O = \vec{0}$ ➔ $\dot{\vec{H}}_O = \vec{0}$ ➔ nas condições do item d), $\omega\Omega = 0$ ➔ assim ou a precessão ou a rotação própria devem ser nulas havendo conservação de quantidade de movimento angular do conjunto em relação ao polo O. (0,5)

2ª Questão (3,5 pontos)

A barra homogênea de massa m e comprimento $2l$ cai sob a ação da gravidade vinculada à parede vertical por um apoio simples em O. No instante imediatamente anterior ao choque com o plano horizontal, são conhecidos: a velocidade do ponto O, $\vec{v}_O = -v\,\vec{j}$, o vetor de rotação da barra, $\vec{\omega} = \vec{0}$ e o valor do ângulo θ, $\theta = 45^\circ$. Considerando que não há atrito no contato da barra com o plano horizontal e dado o coeficiente de restituição $\boldsymbol{e}$, pede-se:

a) O diagrama de corpo livre dos impulsos atuantes na barra durante o choque;

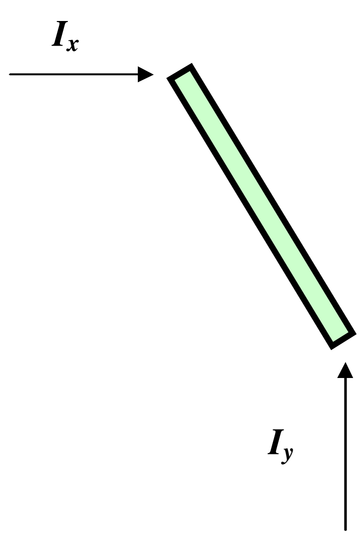
b) Obtenha equações que permitam determinar $\vec{v}_O'$ e $\vec{\omega}'$ (a velocidade do ponto O e o vetor de rotação da barra imediatamente após o choque), bem como os impulsos indicados no item a);



c) Determine $\vec{v}_O'$, $\vec{\omega}'$ e os impulsos.

Resolução

a) dcl dos impulsos (0.5)



b) Equacionamento

TRI:

$$m(\vec{v}_G' - \vec{v}_G) = \sum \vec{I} \; ;$$

Imediatamente antes do choque $\vec{v}_G = -v\,\vec{j}$; adotando $\vec{v}_O' = -v_O'\,\vec{j}$ e $\vec{\omega}' = \omega'\,\vec{k}$, resulta $\vec{v}_G' = \omega' l \cos\theta \vec{i} + (\omega' l \sin\theta - v_O')\,\vec{j}$; substituindo na expressão do TRI chega-se a

$$\begin{cases} m\omega' l \cos\theta = I_x \\ m(\omega' l \sin\theta - v_O' + v) = I_y \end{cases}$$

Particularizando para $\theta = 45^\circ$, as equações ficam

$$\begin{cases} m\omega' l \dfrac{\sqrt{2}}{2} = I_x & (1) \\ m\left(\omega' l \dfrac{\sqrt{2}}{2} - v_O' + v\right) = I_y & (2) \end{cases} \qquad (1.0)$$

TMI, pólo O:

$m(G-O)\wedge(\vec{v}_O' - \vec{v}_O) + J_O\omega'\vec{k} = \sum \vec{M}_O^I$; efetuando as operações indicadas e particularizando para $\theta = 45^\circ$ chega-se a

$$ml\frac{\sqrt{2}}{2}(v - v_O') + J_O\omega' = 2l\frac{\sqrt{2}}{2}I_y \qquad (3) \qquad (1.0)$$

Finalmente, considerando as velocidades relativas na direção da normal de choque e empregando a relação

$e = \dfrac{v_{rel,A}'}{v_{rel,A}}$, chega-se a

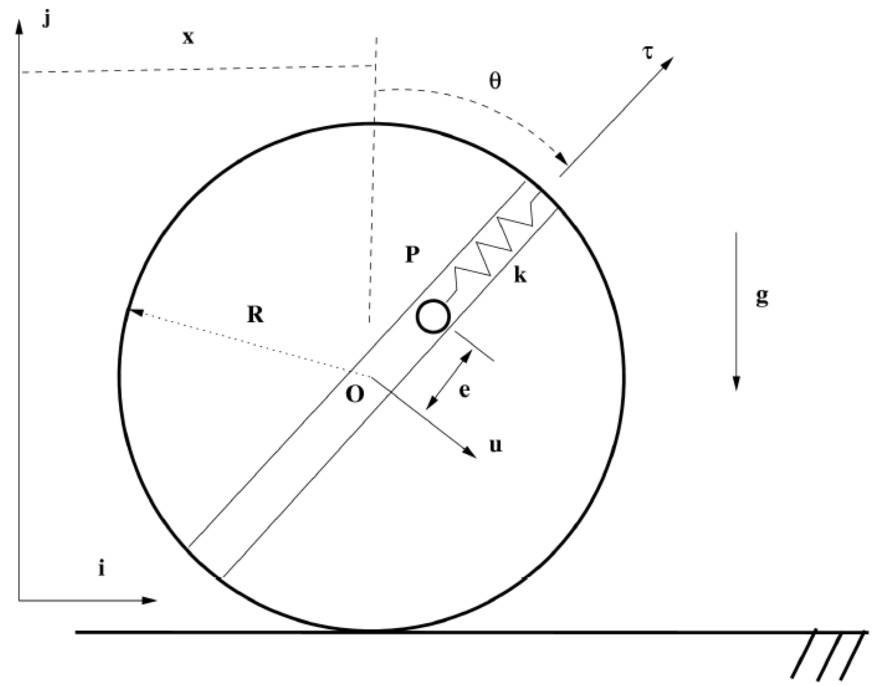
$$ev = l\omega'\sqrt{2} - v_O' \qquad (4) \qquad (0.5)$$

c) Resolvendo as equações obtém-se:

$$\begin{cases} v_O' = \dfrac{v(3-e)}{4} \; ; \omega' = \dfrac{3v\sqrt{2}(1+e)}{8l} \\ I_x = \dfrac{3mv(1+e)}{8} ; I_y = \dfrac{5mv(1+e)}{8} \end{cases} \qquad (0.5)$$

3 ª Questão (3,5 pontos)
Um aro, de massa desprezível e raio *R*, rola sem escorregar sobre um plano horizontal. Solidária ao aro, há uma guia, ao longo do diâmetro, dentro da qual se desloca, sem atrito, um ponto material *P* de massa *m*. O ponto material está ligado ao aro através de uma mola de constante de rigidez *k* e comprimento não deformado *R/2*. Sabendo que o sistema parte nas condições $x=0$, $e=R/2$, $\theta=0$ e $\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$, determine, utilizando como coordenadas generalizadas θ e *e*:

a) a energia potencial do sistema;
b) a energia cinética do sistema;
c) a equação do movimento correspondente à coordenada generalizada *e*.



a) Energia potencial

$$V = mge\cos(\theta) + \frac{k(e - R/2)^2}{2}$$

b) Velocidade de P

$$\vec{v}_P = (R\dot{\theta} + \dot{e}sen(\theta) + e\dot{\omega}cos(\theta))\vec{i} + (\dot{e}cos(\theta) - e\dot{\omega}sen(\theta))\vec{j}$$

Energia cinética

$$T = \frac{m}{2}(R\dot{\theta} + \dot{e}sen(\theta) + e\dot{\omega}cos(\theta))^2 + \frac{m}{2}(\dot{e}cos(\theta) - e\dot{\omega}sen(\theta))^2$$

c) Derivada parcial de L com respeito a $\dot{e}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = m(R\dot{\theta}sen(\theta) + \dot{e})$$

cuja derivada no tempo torna-se,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}}\right) = m(R\ddot{\theta}sen(\theta) + R\dot{\theta}^2cos(\theta) + \ddot{e})$$

Derivada parcial de L com respeito a e

$$\frac{\partial L}{\partial e} = m(R\dot{\theta}^2cos(\theta) + e\dot{\theta}^2) - mgcos(\theta) - k(e - R/2)$$

Equação do movimento correspondente à coordenada generalizada e

$$m(R\ddot{\theta}sen(\theta) + \ddot{e} - e\dot{\theta}^2) + mgcos(\theta) + k(e - R/2) = 0$$