ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

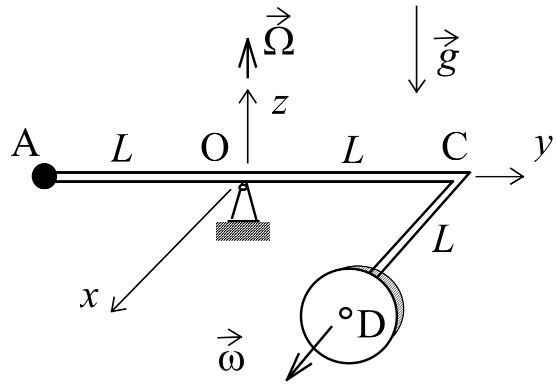
GABARITO

PME 2200 – MECÂNICA B –Prova de Recuperação – 25/7/2006 – Duração 100 minutos

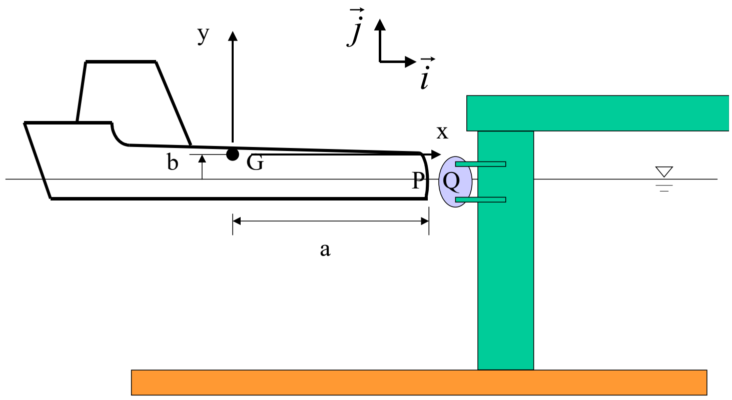
1ª Questão (3,5 pontos)

O sistema da figura é composto pela barra AOCD de massa desprezível, pela esfera A, de massa concentrada *m*, e pelo disco D de massa *M* e raio *R*. A barra, dinamicamente equilibrada no plano horizontal, gira ao redor do eixo vertical *z*, que passa pela articulação O, com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$ constante, e o disco gira ao redor do trecho CD da barra com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$ de módulo constante. O sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) é solidário à barra. Pede-se:

a) O vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_{abs}$ do disco e a aceleração do ponto D;
b) A relação entre Ω e ω e a relação entre as massas *m* e *M* para que o movimento seja possível;
c) As reações na articulação O.



2ª Questão (3,0 pontos)



A figura ao lado mostra um rebocador portuário prestes a se chocar contra uma defensa de um pier. A embarcação, de massa total *M*, realiza uma manobra à ré, em movimento de translação pura, com velocidade constante, tal que $\vec{V}_G = u\vec{i}$ é o vetor de velocidade de seu centro de massa, imediatamente anterior ao choque. O ponto de contacto da embarcação com a defensa é *P*, tal que $(P-G) = a\vec{i} - b\vec{j}$. Admitindo válida a hipótese de restituição de Newton, com coeficiente ***e***, e desprezando qualquer forma de atrito, pede-se:

a) elabore o diagrama de corpo-livre;
b) equacione o problema de impacto;
c) determine o impulso $\vec{I}$ aplicado à embarcação;
d) determine a velocidade $\vec{V}_G{}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$, do centro de massa *G* da embarcação e o vetor de rotação da embarcação $\vec{\omega}'$, logo após o choque.

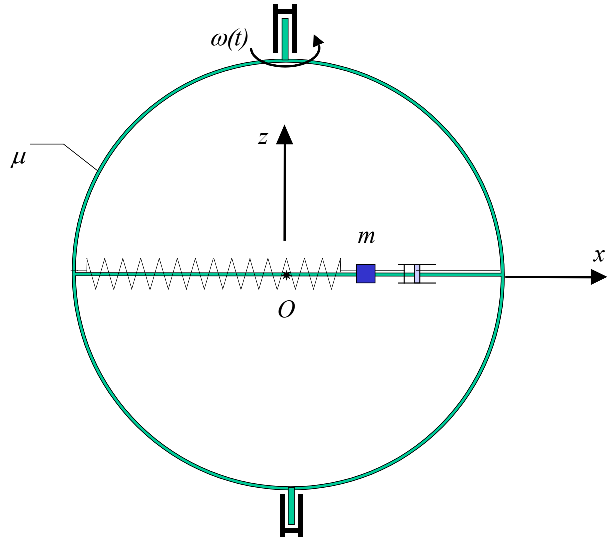
Dado: *J*, momento de inércia total da embarcação em torno do eixo Gz .

3ª Questão (3,5 pontos)

A figura representa um sistema dinâmico composto por um anel rígido, de raio R, e uma haste diametral, em torno da qual estão montados: uma mola helicoidal linear, ideal e de constante elástica K, e um amortecedor linear, ideal e de coeficiente de amortecimento C. A mola e o amortecedor prendem um bloco de massa m ao anel. A mola tem comprimento natural igual a R. O bloco, idealizado como um ponto material, pode deslizar sem atrito sobre a haste diametral, que tem densidade linear de massa μ, igual à do anel. O anel gira em torno de um eixo fixo Oz, perpendicular à haste diametral, com velocidade angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, sob a aplicação de um torque $M(t)$ em torno do eixo Oz.

Considerando como coordenadas generalizadas o ângulo $\theta(t)$ e a posição relativa do bloco na haste, $x(t)$, pede-se:

a) Determine o momento de inércia diametral do conjunto anel+haste (despreze a espessura);
b) Escreva a função de Energia Cinética do Sistema;
c) Escreva a Função de Energia Potencial do Sistema e a Função Dissipação de Rayleigh;
d) Deduza as equações de movimento do sistema acionado pelo torque $M(t)$, através do formalismo Lagrangiano (utilize as equações de Lagrange).



PME 2200 – MECÂNICA B –Prova de Recuperação – 25/7/2006 – Duração 100 minutos

RESOLUÇÃO

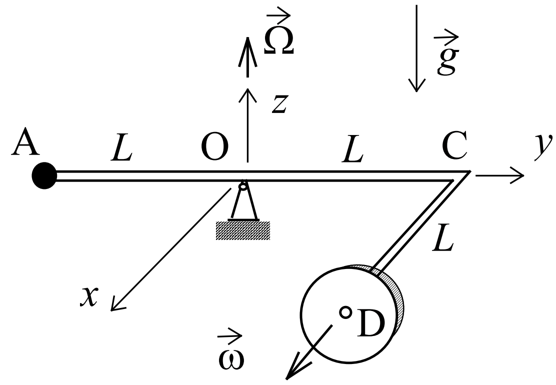
1ª Questão (3,5 pontos)

O sistema da figura é composto pela barra AOCD de massa desprezível, pela esfera A, de massa concentrada *m*, e pelo disco D de massa *M* e raio *R*. A barra, dinamicamente equilibrada no plano horizontal, gira ao redor do eixo vertical *z*, que passa pela articulação O, com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$ constante, e o disco gira ao redor do trecho CD da barra com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$ de módulo constante. O sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) é solidário à barra. Pede-se:

a) O vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_{abs}$ do disco e a aceleração do ponto D;

b) A relação entre Ω e ω e a relação entre as massas *m* e *M* para que o movimento seja possível;

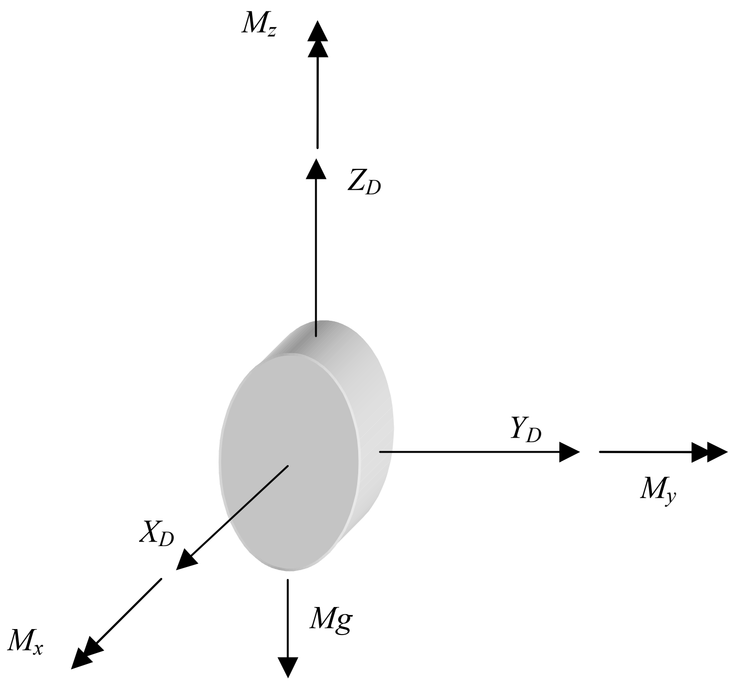
c) As reações na articulação O.



Solução

a) $$\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{i} + \Omega\vec{k};$$ $$\vec{a}_D = -\Omega^2 L(\vec{i} + \vec{j});$$ (0,5)

b) Diagrama de corpo livre do disco



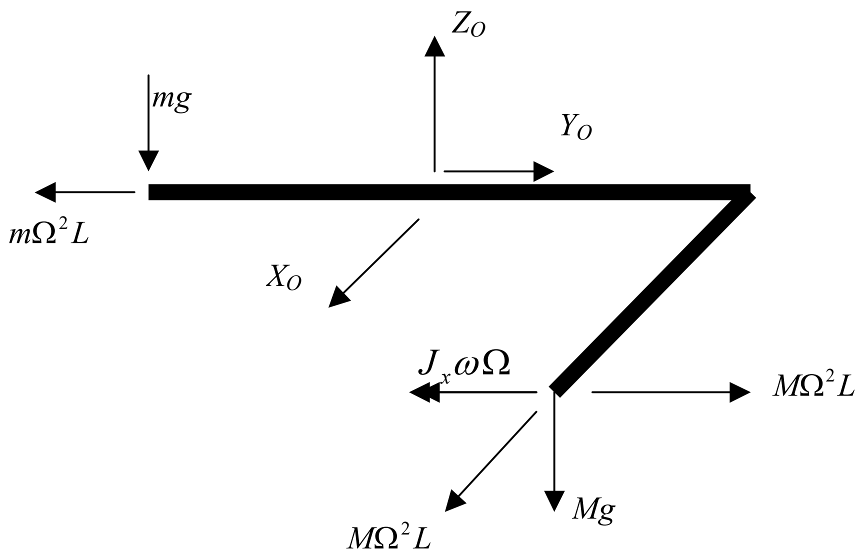
TMB disco:

$$-M\Omega^2 L(\vec{i}+\vec{j}) = X_D\vec{i} + Y_D\vec{j} + (Z_D - Mg)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} X_D = -M\Omega^2 L \\ Y_D = -M\Omega^2 L \\ Z_D = Mg \end{cases};$$

TMA disco, pólo em D:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_D \begin{Bmatrix} \omega \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \Rightarrow M_y = \omega\Omega\frac{MR^2}{2};$$ (1,0)

Diagrama de corpo livre da barra: (0,5)



Equilíbrio da barra:

$$\begin{cases} X_O + M\Omega^2 L = 0 \\ Y_O + M\Omega^2 L - m\Omega^2 L = 0 \\ Z_O - Mg - mg = 0 \end{cases};$$ (0,5)

$$\begin{cases} MgL - J_x\omega\Omega = 0 \\ -Mgl + mgl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \dfrac{2gL}{\Omega R^2} \\ m = M \end{cases}$$ (0,5)

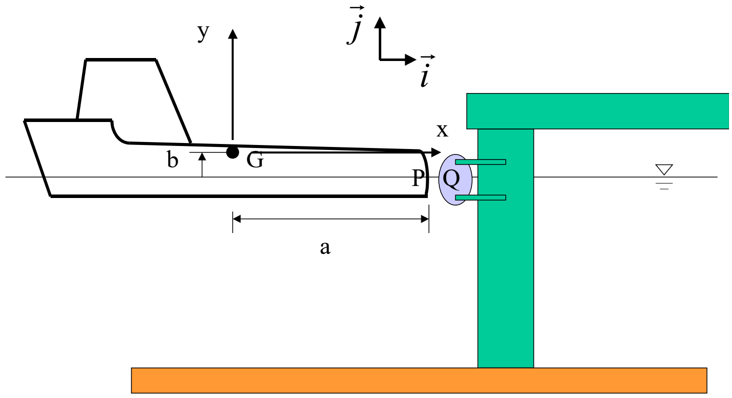
c)

$$\begin{cases} X_O = -M\Omega^2 L \\ Y_O = 0 \\ Z_O = (M+m)g \end{cases};$$ (0,5

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos)

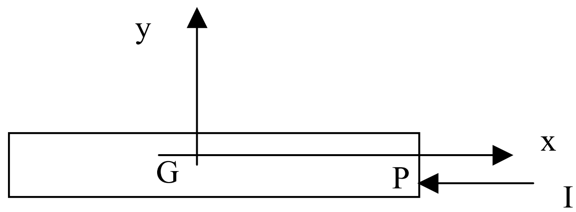


A figura ao lado mostra um rebocador portuário prestes a se chocar contra uma defensa de um pier. A embarcação, de massa total M, realiza uma manobra à ré, em movimento de translação pura, com velocidade constante, tal que $\vec{V}_G = u\vec{i}$ é o vetor de velocidade de seu centro de massa, imediatamente anterior ao choque. O ponto de contacto da embarcação com a defensa é P, tal que $(P-G) = a\vec{i} - b\vec{j}$. Admitindo válida a hipótese de restituição de Newton, com coeficiente $\boldsymbol{e}$, e desprezando qualquer forma de atrito, pede-se:

a) elabore o diagrama de corpo-livre;
b) equacione o problema de impacto;
c) determine o impulso $\vec{I}$ aplicado à embarcação;
d) determine a velocidade $\vec{V}_G{}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$, do centro de massa G da embarcação e o vetor de rotação da embarcação $\vec{\omega}'$, logo após o choque.

Dado: J, momento de inércia total da embarcação em torno do eixo Gz.

DCL **(0,5)**



Teorema do Impulso: **(0,5)**

$$\vec{I} = \Delta\vec{Q} \quad \Rightarrow \quad -I\vec{i} = M\left[(u'-u)\vec{i} + (v'-0)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow v' = 0 \qquad ; \qquad u' = u - \frac{I}{M} \quad (1) \qquad ; \qquad \vec{v}'_G = \left(u - \frac{I}{M}\right)\vec{i} \quad (2)$$

Eq. das velocidades relativas: $v'_{Pn} = -eu$ **(0,5)**

Poisson: **(0,5)**

$$\vec{v}'_P = \vec{v}'_G + \vec{\omega}' \wedge (P-G) \quad \Rightarrow \left(-eu\vec{i} + v'_{Py}\vec{j}\right) = \left(u - \frac{I}{M}\right)\vec{i} + \omega'\vec{k} \wedge \left(a\vec{i} - b\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{I}{Mb} - (1+e)\frac{u}{b} \qquad (3)$$

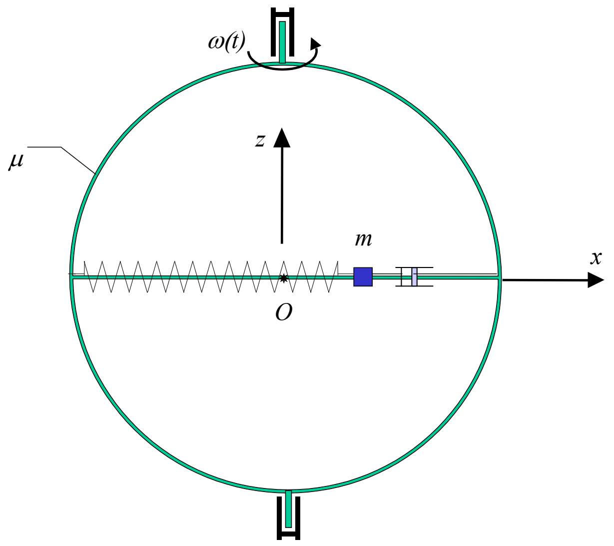
TMI: $\Delta\vec{H}_G = \int \vec{M}_G dt \quad \Rightarrow \quad J\omega'\vec{k} = -Ib\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \omega' = -\dfrac{Ib}{J} \quad (4)$ **(0,5)**

Resolvendo (1), (3) e (4) e susbstituindo em (2): **(0,5)**

$$\boxed{\vec{I} = -\frac{JMu}{(Mb^2 + J)}(1+e)\vec{i}} \qquad \boxed{\vec{v}'_G = u\left(1 - \frac{J(1+e)}{(Mb^2+J)}\right)\vec{i}} \qquad \boxed{\vec{\omega}' = -\frac{Mub}{(Mb^2+J)}(1+e)\vec{k}}$$

3ª Questão (3,5 pontos)

A figura representa um sistema dinâmico composto por um anel rígido, de raio *R*, e uma haste diametral, em torno da qual estão montados: uma mola helicoidal linear, ideal e de constante elástica *K*, e um amortecedor linear, ideal e de coeficiente de amortecimento *C*. A mola e o amortecedor prendem um bloco de massa *m* ao anel. A mola tem comprimento natural igual a *R*. O bloco, idealizado como um ponto material, pode deslizar sem atrito sobre a haste diametral, que tem densidade linear de massa μ, igual à do anel. O anel gira em torno de um eixo fixo *Oz,* perpendicular à haste diametral, com velocidade angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, sob a aplicação de um torque *M*(*t*) em torno do eixo *Oz*.



Considerando como coordenadas generalizadas o ângulo $\theta(t)$ e a posição relativa do bloco na haste, $x(t)$, pede-se:

a) Determine o momento de inércia diametral do conjunto anel+haste (despreze a espessura);
b) Escreva a função de Energia Cinética do Sistema;
c) Escreva a Função de Energia Potencial do Sistema e a Função Dissipação de Rayleigh;
d) Deduza as equações de movimento do sistema acionado pelo torque *M*(*t*), através do formalismo Lagrangiano (utilize as equações de Lagrange).

a) Momento de inércia do anel em torno de *Oz*: $I_{az} = \frac{1}{2} I_{ax} = \frac{1}{2}(\mu 2\pi R)R^2 = \mu\pi R^3$

Momento de inércia da haste em torno de *Oz*: $I_{hz} = \frac{1}{12}(\mu 2R)(2R)^2 = \frac{2}{3}\mu R^3$

Momento de inércia de anel+haste em torno de *Oz*: $\boxed{I = I_z = I_{az} + I_{hz} = \frac{1}{3}(\mu 2R)R^2 = \left(\pi + \frac{2}{3}\right)\mu R^3}$ (0,5)

b) Energia cinética de anel+haste: $T_{ah} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{2}{3}\right)\mu R^3 \dot{\theta}^2$

Energia cinética do bloco: $T_b = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \left(x\dot{\theta}\right)^2\right)$

Energia cinética do sistema: $\boxed{T = T_{ah} + T_b = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(I + mx^2\right)\dot{\theta}^2}$ (1,0)

c) Função de energia potencial (elástica): $\boxed{V = \frac{1}{2} Kx^2}$ (0,5)

Função de dissipação de Rayleigh: $\boxed{D = \frac{1}{2} C\dot{x}^2}$ (0,5)

d) Equações de movimento via formalismo Lagrangiano, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}=Q_j$; $(\mathrm{q}_1, q_2)=(x,\theta)$:

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(I + mx^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Kx^2}$$

Mas,

$$\begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial x} = mx\dot{\theta}^2 - Kx \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\end{array}; \quad \begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(I + mx^2\right)\dot{\theta}\end{array}; \quad \begin{array}{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(I + mx^2\right)\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta}\end{array}; \quad \begin{array}{l}\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = C\dot{x} \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0\end{array}.$$

Forças generalizadas: $Q_1 = 0$; $Q_2 = M(t)$

Assim:

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} - mx\dot{\theta}^2 + Kx + C\dot{x} = 0 \\ \left(I + mx^2\right)\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} = M(t)\end{cases}}.$$

Ou, rearranjando os termos na primeira equação:

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx - mx\dot{\theta}^2 = 0 \\ \left(I + mx^2\right)\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} = M(t)\end{cases}} \text{(1,0).}$$