ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

# PME 2200 – MECÂNICA B – Prova de Recuperação – 26 de julho de 2005

**Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)**

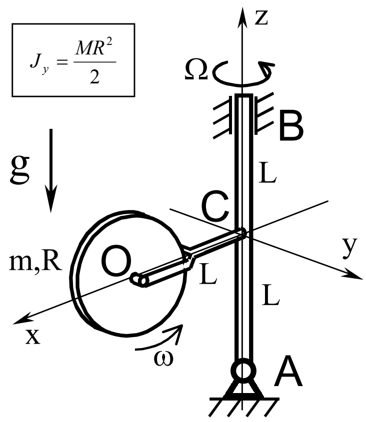
**1ª Questão** (3,0 pontos)

Um disco de massa $m$ e raio $R$ gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{j}$, constante, em torno do ponto $O$, como indicado na figura. Neste mesmo instante, a barra AB, de comprimento $2L$ e massa desprezível, gira com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$, constante. Pede-se, na posição mostrada na figura (disco no plano xz):

(a) O vetor de rotação absoluto do disco.

(b) O momento que o disco aplica sobre o garfo $OC$, de comprimento $L$.

(c) As reações nos mancais A e B, desprezando-se a massa do garfo.




Resolução:

(a) $\boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{j} + \Omega\vec{k}}$

(b) $\vec{H}_O = I_{yy}\omega\vec{j} + I_{zz}\Omega\vec{k}$ ; $I_{yy} = mR^2/2$ ; $I_{zz} = mR^2/4$

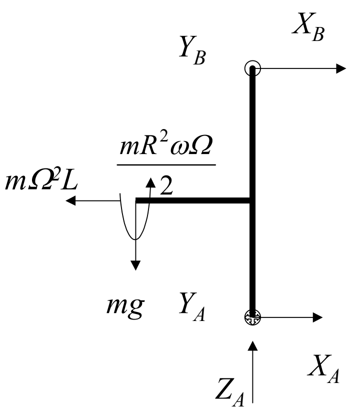
$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O$ (TMA; O=G)

Então, como $\dot{\vec{j}} = \Omega\vec{k} \times \vec{j} = -\Omega\vec{i}$ :

$\vec{M}_O^{\,reat} = -\vec{M}_O = I_{yy}\omega\Omega\vec{i}$ , i.e., $\boxed{\vec{M}_O^{\,reat} = \dfrac{mR^2\omega\Omega}{2}\vec{i}}$

(c) TMB: $\vec{R} = m\vec{a}_O$ ; $\vec{a}_O = -\Omega^2 L\vec{i}$ .

$\vec{R} = (X_A + X_B)\vec{i} + (Y_A + Y_B)\vec{j} + (Z_A - mg)\vec{k}$




Equilíbrio de forças e momento:

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = \frac{1}{2}m(\Omega^2 L - g); \quad X_B = \frac{1}{2}m(\Omega^2 L + g) \\ \\ Y_A = Y_B = \frac{1}{4}\frac{mR^2\omega\Omega}{L} \\ \\ Z_A = mg; \quad Z_B = 0 \end{array}}$$

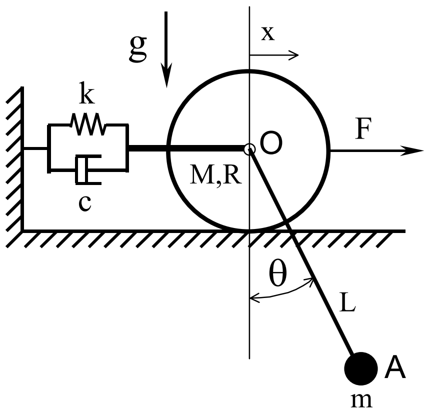
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**2ª Questão** (4,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, o disco de centro *O*, massa *M* e raio *R* rola sem escorregar sobre o plano horizontal e está acoplado a uma superfície rígida por meio de uma mola de rigidez *k* e um amortecedor viscoso linear de constante *c*. Uma massa concentrada *m* encontra-se na extremidade de um pêndulo, de comprimento *L*, acoplado ao centro do disco. A mola tem deformação nula quando a coordenada *x* vale zero. Uma força horizontal *F* atua no disco. Usando *x* e $\theta$ como coordenadas generalizadas, determine:




(a) A energia cinética do sistema.
(b) A energia potencial do sistema.
(c) As equações de movimento para as coordenadas *x* e $\theta$, usando o método de Lagrange.

Resolução:

(a) Energia Cinética: $T = T_D + T_A$ (D:disco; A: pêndulo)

Disco, s/ escorregamento (C=CIR): $T_D = \frac{1}{2} I_C \Omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3MR^2}{2}\Omega^2 = \frac{3MR^2}{4}\Omega^2$.

Energia cinética do pêndulo: $T_A = \frac{1}{2} m v_A{}^2$.

Mas, $\vec{v}_A = (\dot{x} + \dot{\Theta} L\cos\theta)\vec{i} + (\dot{\Theta} L \sin\theta)\vec{j}$ e então: $T_A = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\Theta} L\cos\theta + \dot{\theta}^2 L^2\right)$.

Portanto: $\boxed{T = \left(\frac{3}{4}M + \frac{1}{2}m\right)\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\Theta} L\cos\theta + \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 L^2}$ .

(b) Energia Potencial: $\boxed{V = \frac{1}{2}kx^2 + mgL(1-\cos\theta)}$ .

(c) Rayleighiana: $R = \frac{1}{2}C\dot{x}^2$ . Forças generalizadas outras (exceto as conservativas ou dissipativas de Rayleigh): $Q_x = F$; $Q_\Theta = 0$ . Aplicando a equação de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$ vem:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{x} + \left(mL\cos\theta\right)\ddot{\theta} - mL\dot{\theta}^2\sin\theta + C\dot{x} + kx \ = \ F \\ \\ \left(mL\cos\theta\right)\ddot{x} \quad + \quad mL^2\ddot{\theta} \quad + \quad mgL\sin\theta \quad = \ 0 \end{array}}$$
.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**3ª Questão** (3,0 pontos)

(a) Em relação ao exercício programa 1 (EP1), você obteve as seguintes equações de movimento para o sistema proposto no EP1, para o rotor na posição horizontal:

$$\ddot{\theta} = (P(x_G \cos(\theta) - y_G sen(\theta)) + T(\dot{\theta}) - Q(\dot{\theta}))/J_Z$$

(**a1**) desenhe o diagrama de blocos SCICOS apenas para a equação de movimento do rotor e saída gráfica da velocidade angular;

(**a2**) Considerando os resultados que você obteve durante a simulação do movimento para o rotor na **posição vertical**, esboce dois gráficos em função do tempo sendo um para a velocidade angular do rotor e outro da reação horizontal no mancal.

(b) Em relação ao exercício programa 2 (EP2), você obteve as seguintes equações de movimento para o sistema proposto no EP2:

$$(M+m)\ddot{x} - (ma\cos\theta)\ddot{\theta} + (ma\,sen\theta)\dot{\theta}^2 + 2kx = 0$$

$$(-ma\cos\theta)\ddot{x} + 4ma^2\ddot{\theta}/3 + mga\,sen\theta = 0$$

(**b1**) desenhar o diagrama de blocos SCICOS utilizado na simulação numérica do EP2;

(**b2**) esboçar num mesmo gráfico temporal a posição do bloco **x(t)** e a posição angular da barra **θ(t)** que você obteve durante a simulação para rigidez de mola **k/9** e $\theta_0 = (\pi - 0{,}1)$ e demais condições iniciais nulas.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

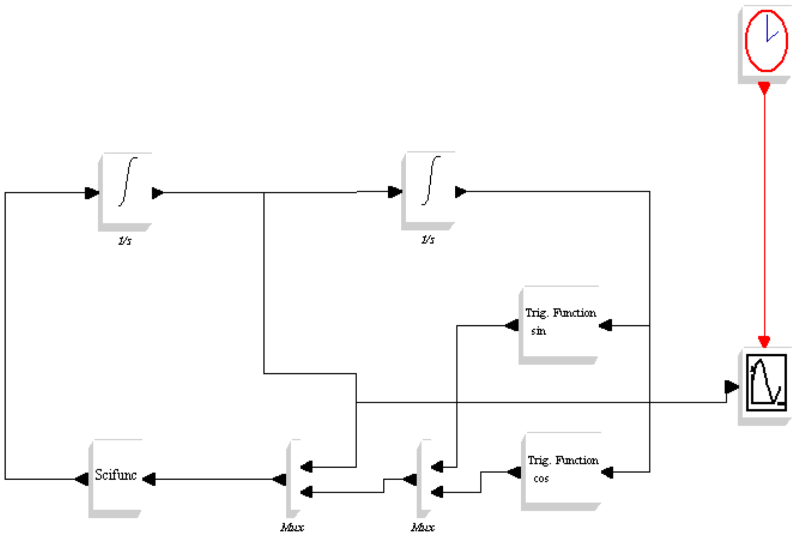
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

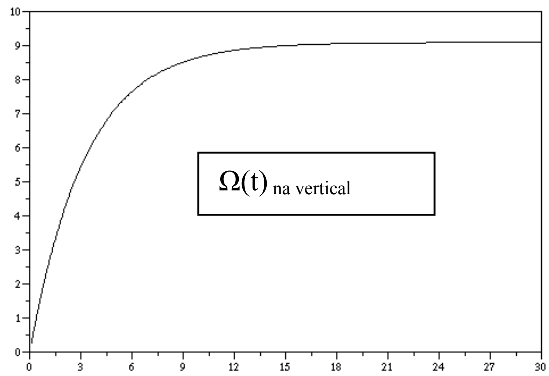
**3ª Questão** (Resolução):

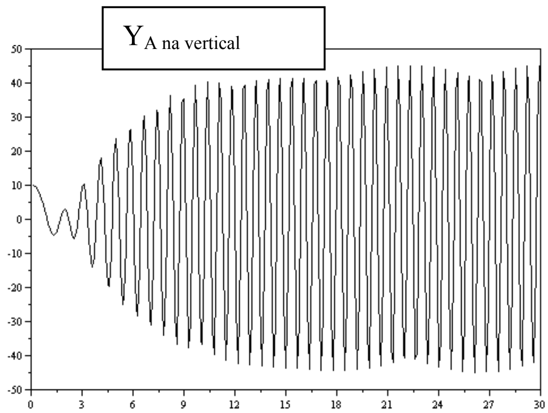
a1) **Diagrama de bloco** do programa *SCICOS* para o modelo do rotor.
Equação de movimento do rotor utilizada no bloco *Scifunc*:

$$\ddot{\theta} = (P(x_G \cos(\theta) - y_G sen(\theta)) + T(\dot{\theta}) - Q(\dot{\theta})) / J_Z$$




a2) Gráfico temporal da **velocidade angular do rotor** (tempo em segundos e velocidade angular em rad/s); gráfico temporal da **reação na direção $Y_A$ no mancal A** para o rotor na **posição vertical** (valor médio nulo - força em *Newtons*) e gráfico da reação na **direção $Y_A$ na posição horizontal**



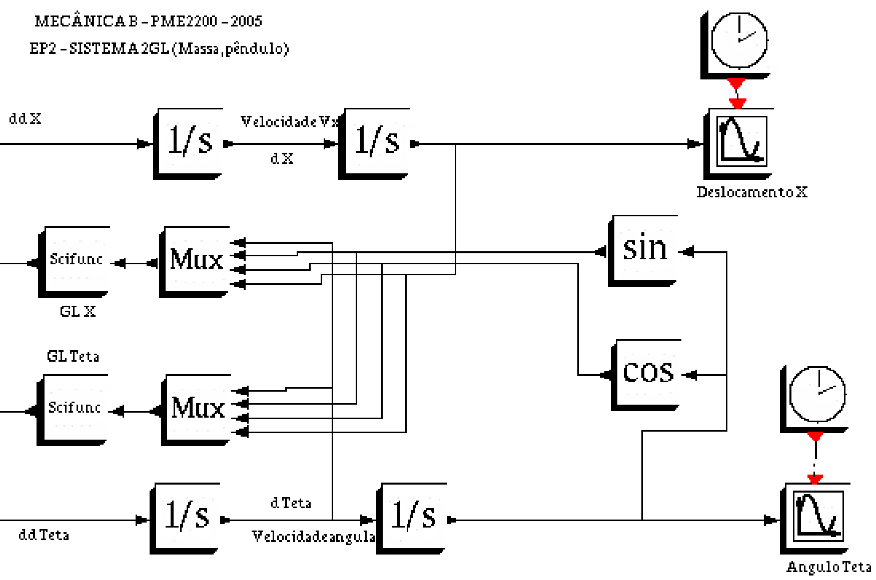



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

b1) diagrama de blocos SCICOS utilizado na simulação numérica do EP2:




b2) gráfico temporal da posição do bloco **x(t)** e da posição angular da barra **θ(t)** que obtido durante a simulação para rigidez de mola **k/9** e $\theta_0$ **= (π – 0,1)** e demais condições iniciais nulas. Conforme a figura, a posição do corpo *x*(t) está em linha contínua e posição angular da barra θ(t) em linha tracejada.