ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

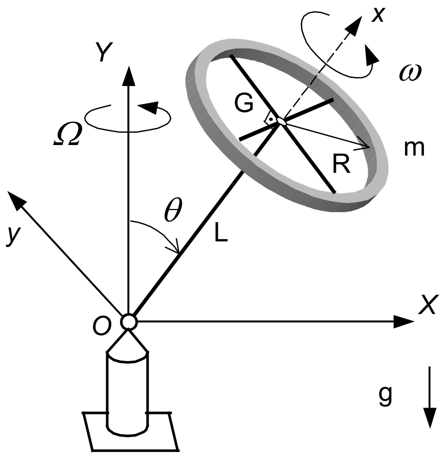
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Prova de Recuperação – 31 de julho de 2003

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

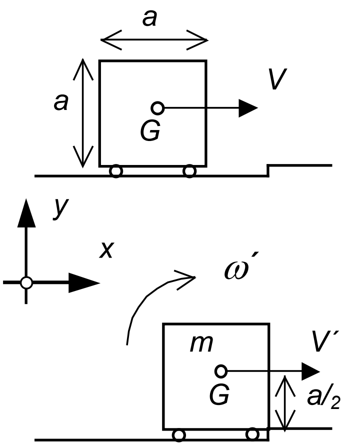
1ª Questão (3,0 pontos)

O anel homogêneo de massa ***m*** e raio ***R*** *(espessura desprezível)*, gira ao redor da barra ***OG*** de massa desprezível e comprimento ***L***, com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo θ e velocidade angular de precessão $\boldsymbol{\Omega}$, constantes e conhecidas. Determine:



a) a velocidade de rotação própria $\boldsymbol{\omega}$;
b) a aceleração do baricentro ***G***;
c) as reações na articulação ***O***.

2ª Questão (3,0 pontos)



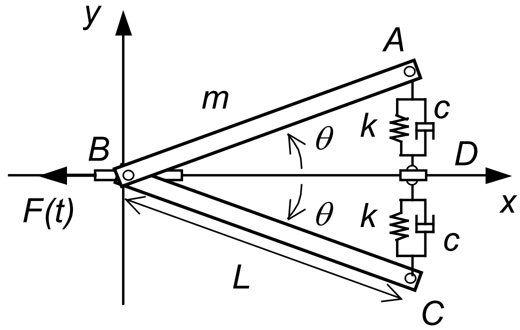
Um cubo homogêneo de lado ***a*** e massa ***m***, translada sobre um plano horizontal com velocidade ***V***, quando se choca com um pequeno degrau. Considerando o choque anelástico (***e*** = 0), determine:

a) a velocidade angular do cubo $\boldsymbol{\omega}'$, imediatamente após o choque;
b) a energia cinética do cubo no instante imediatamente após o choque
c) o valor de ***V*** a partir do qual o cubo tomba.

Dado: $J_{Gzz} = \dfrac{m\,a^2}{6}$

3ª Questão (4,0 pontos)

Duas barras homogêneas idênticas ***AB*** e ***BC*** de comprimento ***L*** e massa ***m***, estão ligadas entre si por uma articulação em ***B***, que desliza sobre o eixo ***x***. Entre o ponto ***A*** e o anel deslizante ***D*** há um amortecedor viscoso linear de constante ***c*** em paralelo com uma mola linear de constante ***k***, de massas desprezíveis, com força nula quando θ = 30°. Há outro conjunto mola+amortecedor entre os pontos ***C*** e ***D***. As barras estão apoiadas num plano horizontal e não há atrito entre elas e o plano. Aplica-se, então uma força $\vec{F}(t) = -F\,\vec{i}$. Determine:



a) a energia cinética ***T*** em função das coordenadas ***x*** e θ do sistema;
b) a energia potencial ***V*** do sistema;
c) a função dissipativa ***R*** (*Rayleigh*) ou o trabalho virtual das forças viscosas;
d) a força generalizada associada a ***F***(t);
e) escreva as equações de *Lagrange* para as coordenadas ***x*** e θ.

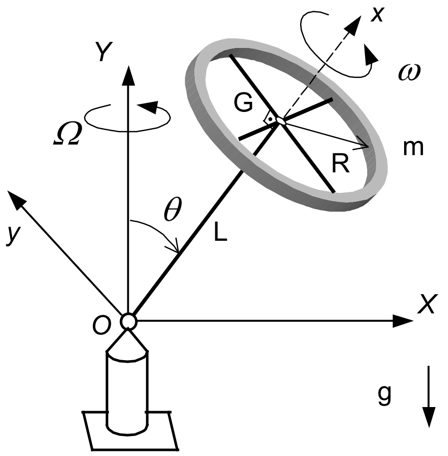
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Resolução da Prova de Recuperação – 31/07/2003

1ª Questão - Resolução (3,0 pontos)



O anel homogêneo de massa m e raio R (espessura desprezível), gira ao redor da barra OG de massa desprezível e comprimento L, com velocidade angular ω . Este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo θ e velocidade angular de precessão Ω, constantes e conhecidas. Determine:

a) a velocidade de rotação própria $\boldsymbol{\omega}$;

$\vec{\omega}_{abs} = \Omega\vec{J} + \omega\vec{i}$ $\quad \vec{J} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ $\quad \vec{\omega}_{abs} = (\omega + \Omega\cos\theta)\,\vec{i} + \Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$

Momento Angular $\quad \vec{H}_O = [J][\omega] + m(G-O)\wedge\vec{V}_O \quad$ onde $\quad \vec{V}_O = 0$

$$\vec{H}_O = \begin{bmatrix} J_{xx}^O & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^O & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega + \Omega\cos\theta \\ \Omega\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{onde } J_{xx}^G = mR^2 \;;\; J_{yy}^G = mR^2/2 \;;\; J_{xx}^O = J_{xx}^G \text{ e } J_{yy}^O = J_{yy}^G + mL^2$$

$$\dot{\vec{H}}_O = J_{xx}^O(\omega + \Omega\cos\theta)\dot{\vec{i}} + J_{yy}^O\,\Omega\operatorname{sen}\theta\,\dot{\vec{j}} \qquad \dot{\vec{i}} = \Omega\vec{J}\wedge\vec{i} = \Omega(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})\wedge\vec{i} = -\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{k} \qquad \dot{\vec{j}} = \Omega\vec{J}\wedge\vec{j} = \Omega\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = -J_{xx}^O(\omega + \Omega\cos\theta)\,\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{k} + J_{yy}^O\,\Omega\operatorname{sen}\theta\,\Omega\cos\theta\,\vec{k}$$

TMA - $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_{ext} = -mg\,L\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}$ $\qquad J_{xx}^O(\omega + \Omega\cos\theta)\,\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{k} - J_{yy}^O\,\Omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\vec{k} = mg\,L\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}$

$$\boxed{\omega = \left(\frac{L^2}{R^2} - \frac{1}{2}\right)\Omega\cos\theta + \frac{g\,L}{R^2\Omega}}$$

b) a aceleração do baricentro $\boldsymbol{G}$; $\qquad (G-O) = L\,\vec{i}$

$\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{\Omega}\wedge(G-O)$ $\qquad \vec{V}_G = 0 + \Omega(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})\wedge L\,\vec{i}$ $\qquad \vec{V}_G = -L\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}$

$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}}\wedge(G-O) + \vec{\Omega}\wedge(\vec{V}_G - \vec{V}_O)$ $\qquad \vec{a}_G = \vec{0} + \vec{0} + \Omega(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})\wedge(-L\Omega\operatorname{sen}\theta\,\vec{k} - \vec{0})$

$$\boxed{\vec{a}_G = -L\Omega^2\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j})}$$

c) as reações na articulação $\boldsymbol{O}$.

TMB - $m\,\vec{a}_G = \vec{R}$ $\qquad m\,\vec{a}_G = -mg\,\vec{J} + R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j} + R_z\,\vec{k}$

$$-mL\Omega^2\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}) = -mg\,(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}) + R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j} + R_z\,\vec{k}$$

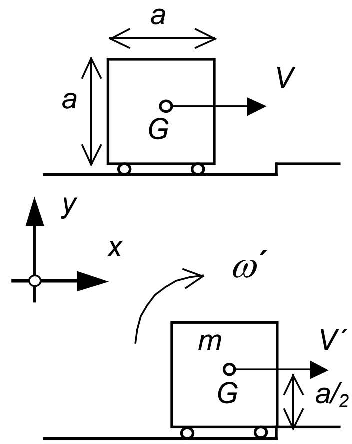
$\boxed{R_z = 0}$ $\qquad \boxed{R_y = m\operatorname{sen}\theta(L\Omega^2\cos\theta + g)}$ $\qquad \boxed{R_x = m(L\Omega^2\operatorname{sen}^2\theta + g\cos\theta)}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão - Resolução (3,0 pontos)



Um cubo homogêneo de lado ***a*** e massa ***m***, translada sobre um plano horizontal com velocidade ***V***, quando se choca com um pequeno degrau. Considerando o choque anelástico (***e*** = 0), determine:

a) a velocidade angular do cubo ***ω´***, imediatamente após o choque;

TMI - $\Delta\vec{H} = \vec{M}_{ext}$ escolhendo o ponto A

$\vec{H}'_A - \vec{H}_A = \vec{M}_A$ onde $\vec{M}_A = 0$

$\vec{H}'_A = m(G-A)\wedge\vec{V}'_A + J^A_{zz}\vec{\omega}'$ $\quad\vec{H}'_A = J^A_{zz}\,\omega'\vec{k}$ pois $\vec{V}'_A = 0$

$\vec{H}_A = m(G-A)\wedge\vec{V}_A + J^A_{zz}\vec{\omega}$ $\quad\vec{H}_A = m\left(-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}\right)\wedge V_A\vec{i}$ $\quad\vec{H}_A = \frac{a}{2}mV_A\vec{k}$ pois $\omega = 0$

$J^A_{zz}\vec{\omega}' = \frac{a}{2}m\vec{V}_A$ como $J^A_{zz} = J^G_{zz} + md^2$ $\quad J^A_{zz} = \frac{ma^2}{6} + m\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2$

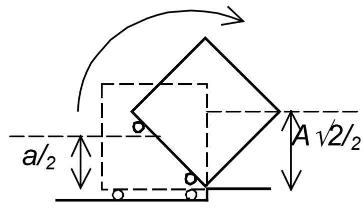
$\boxed{\omega' = \frac{3V}{4a}}$ (1,5)

b) a energia cinética do cubo no instante imediatamente após o choque

$T = \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}J^A_{zz}\omega'^2$ $\quad T = 0 + \frac{2}{6}ma^2\left(\frac{3V}{4a}\right)^2$ $\quad\boxed{T = \frac{3}{16}mV^2}$ (0,5)

c) o valor de ***V*** a partir do qual o cubo tomba.

$V = mg(H_f - H_i)$ $\quad V = mg\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\right)$ $\quad V = mga\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}$



Tomba se $T > V$

$\frac{3}{16}mV^2 > mga\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}$ $\quad\boxed{V^2 > \frac{8(\sqrt{2}-1)}{3}ga}$ (1,0)

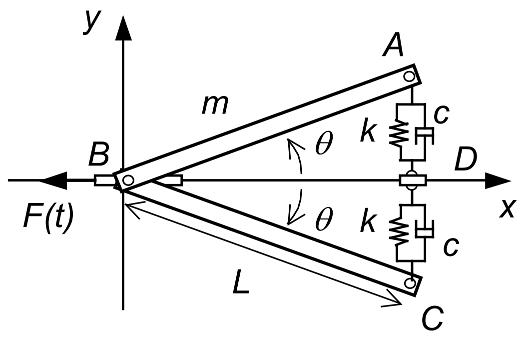
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão - Resolução (4,0 pontos)

Duas barras homogêneas idênticas ***AB*** e ***BC*** de comprimento ***L*** e massa ***m***, estão ligadas entre si por uma articulação em ***B***, que desliza sobre o eixo ***x***. Entre o ponto ***A*** e o anel deslizante ***D*** há um amortecedor viscoso linear de constante ***c*** em paralelo com uma mola linear de constante ***k***, de massas desprezíveis, com força nula quando θ = 30°. Há outro conjunto mola+amortecedor entre os pontos ***C*** e ***D***. As barras estão apoiadas num plano horizontal e não há atrito entre elas e o plano. Aplica-se, então uma força $\vec{F}(t) = -F\,\vec{i}$. Determine:



a) a energia cinética ***T*** em função das coordenadas ***x*** e θ do sistema; (1,0)

$$T = \frac{1}{2} m V_{O'}^2 + m\vec{V}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \wedge (G - O')) + \frac{1}{2}\omega^t J_{o'}\,\omega \quad \text{p/ duas barras} \quad \boxed{T = 2\left(\frac{1}{2} m\dot{x}_B^2 + m\dot{x}_B\,\dot{\theta}\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m L^2\right)\dot{\theta}^2\right)}$$

b) a energia potencial ***V*** do sistema; (1,0)

$$V = \frac{1}{2}k(y_A - y_0)^2 + \frac{1}{2}k(y_C - y_0)^2 \quad V = \frac{1}{2}k(y_A - L\operatorname{sen}30°)^2 + \frac{1}{2}k(-y_{AC} - L\operatorname{sen}30°)^2 \quad \boxed{V = k\,L^2(\operatorname{sen}\theta - 1/2)^2}$$

c) a função dissipativa ***R*** (*Rayleigh*);

$$R = \frac{1}{2}c\,\dot{y}_A{}^2 + \frac{1}{2}c\,\dot{y}_C{}^2 \qquad \dot{y}_A = L\dot{\theta}\cos\theta \qquad \boxed{R = c\,L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta} \quad (0{,}5)$$

d) a força generalizada associada a ***F***(t);

$$\delta W = \vec{F}\,\delta x \qquad \delta W = Q_x\,\delta q_x + Q_\theta\,\delta q_\theta \quad \text{como} \quad \delta x = \delta q_x \qquad Q_\theta = 0 \quad \text{e} \quad \boxed{Q_x = -F} \quad (0{,}5)$$

e) escreva as equações de *Lagrange* para as coordenadas ***x*** e θ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = Q_q$$

Para coordenada generalizada ***x***

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + mL\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad \boxed{2m\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + mL\dot{\theta}^2\cos\theta = -F} \quad (0{,}5)$$

Para coordenada generalizada θ

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL\,\dot{x}\operatorname{sen}\theta + \frac{2}{3}mL^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = mL\,\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\theta \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2\,k\,L^2(\operatorname{sen}\theta - 1/2)\cos\theta \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 2cL^2\dot{\theta}\cos^2\theta$$

$$\boxed{\frac{2}{3}m\,L^2\ddot{\theta} + m\,L\,\ddot{x}\operatorname{sen}\theta + m\,L\,\dot{\theta}^2\cos\theta - m\,L\,\dot{\theta}\,\dot{x}\cos\theta + 2\,c\,L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\,k\,L^2(\operatorname{sen}\theta - 1/2)\cos\theta = 0} \quad (0{,}5)$$