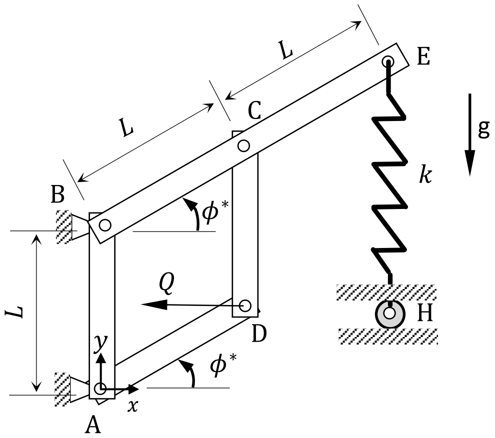
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Av. Prof. Mello Moraes, 2231, CEP 05508-030, São Paulo, SP
Tel. 55-11 30915337
Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA II - PME 3200 – Prova Substitutiva – 11 de Julho de 2023

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)

1ª Questão (3,5 pontos). No mecanismo da figura, as barras AB, BE, AD e CD possuem massa desprezível e todas as articulações (internas e externas) são ideais. O rolete em H pode deslizar livremente (isto é, sem atrito) no interior da guia horizontal. Entre E e H existe uma mola linear ideal de constante elástica k. Quando o mecanismo é submetido à força de módulo Q aplicada em D, a mola se distende até atingir a configuração mostrada, de equilíbrio estático, com $\phi = \phi^*$. Com base nessas informações, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e o sistema ortogonal de coordenadas $Axyz$ e a respectiva base $\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$, obtenha a expressão de ϕ^* em função dos parâmetros k, L e da força aplicada Q. Sabe-se que quando o ângulo $\phi = 0$, a mola está em seu comprimento natural (indeformada).



RESOLUÇÃO

O mecanismo possui 1 grau de liberdade, dado pela coordenada generalizada ϕ. Para a aplicação do PTV, é necessário determinar o trabalho virtual de todas as forças atuantes no sistema, ativas e reativas.

Considerando que: (i) os vínculos em A, B, C, D, E e H são ideais e os deslocamentos virtuais lhes são compatíveis; (ii) as barras possuem massa desprezível, realizam trabalho virtual apenas a força $\vec{Q} = -Q\vec{\imath}$ e a força elástica $\vec{F}_{EL} = -k(y - y_0)\vec{\jmath}$.

Assim, o PTV fornece:

$$\delta\tau = \delta\tau_Q + \delta\tau_{EL} = -Q\vec{\imath} \cdot \vec{\delta}_D - k(y - y_0)\vec{\jmath} \cdot \vec{\delta}_E = 0 \qquad (1)$$

(1,0 ponto)

As posições de D e E, pontos de aplicação das forças $\vec{Q}$ e $\vec{F}_{EL}$, respectivamente, são dadas por:

$$(D - A) = L(\cos\phi\ \vec{\imath} + \sin\phi\ \vec{\jmath})$$

$$(E - A) = 2L(\cos\phi\ \vec{\imath} + \sin\phi\,\vec{\jmath}) + L\vec{\jmath}$$

Portanto, os deslocamentos virtuais desses pontos, são:,

$$\delta(D - A) = L(-\sin\phi\ \ \vec{\imath} + \cos\phi\ \vec{\jmath})\delta\phi \qquad (2)$$

$$\delta(E - A) = 2L(-\sin\phi\ \ \vec{\imath} + \cos\phi\ \vec{\jmath})\delta\phi \qquad (3)$$

(1,0 ponto)

Nada foi mencionado sobre a dimensão inicial da mola, apenas que estava indeformada. Portanto, sem perda de generalidade, assume-se $y_0 = 0$ na equação (1). Lembrando que ϕ^* é o valor do ângulo ϕ compatível com o equilíbrio, a substituição de (2) e (3) em (1) resulta em:

$$\delta\tau = [-Q\vec{\imath} \cdot L(-\sin\phi \;\; \vec{\imath} + \cos\phi\,\vec{\jmath}) - k(2L \;\sin\phi)\vec{\jmath} \cdot 2L(-\sin\phi \;\; \vec{\imath} + \cos\phi \;\vec{\jmath})]\delta\phi = 0 \qquad (4)$$

Para que a expressão acima seja verdadeira para $\forall\phi$ deve-se ter:

$$-Q\vec{\imath} \cdot L(-\sin\phi^* \;\vec{\imath} + \cos\phi^*\,\vec{\jmath}) - k(2L \;\sin\phi^*)\vec{\jmath} \;\cdot\; 2L(-\sin\phi^* \;\; \vec{\imath} + \cos\phi^* \;\vec{\jmath}) = 0$$

ou seja,

$$QL \;\sin\phi^* \; - 4kL^2 \sin\phi^* \;\cos\phi^* = 0$$

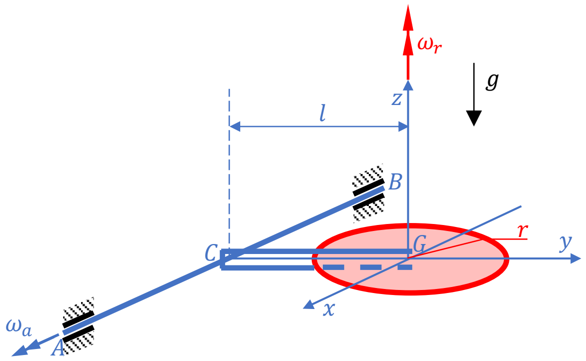
Da equação acima, obtém-se a expressão do ângulo ϕ^* compatível com o equilíbrio do sistema:

$$\cos\phi^* = \frac{Q}{4L\,k} \Rightarrow \;\; \phi^* = \arccos\left(\frac{Q}{4L\,k}\right)$$

(1,5 pontos)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Av. Prof. Mello Moraes, 2231, CEP 05508-030, São Paulo, SP
Tel. 55-11 30915337
Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos). No mecanismo ilustrado na figura, o disco homogêneo de massa m e raio r gira em torno do eixo Gz com velocidade angular $\omega_r\vec{k}$ (ω_r constante), suportado pelo dispositivo em forma de garfo $ABCG$, o qual gira com velocidade angular $\omega_a\vec{\imath}$ (ω_a constante) apoiado nos mancais A e B. **Utilizando o sistema de eixos $Gxyz$ ligados ao dispositivo $ABCG$, e a respectiva base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$,** pede-se:



a) Expressar o vetor rotação absoluta do disco;
b) Expressar a matriz de inércia do disco com relação ao polo G;
c) Expressar a quantidade de movimento angular do disco com relação ao polo G;
d) Determinar o binário giroscópico aplicado ao disco pelo dispositivo $ABCG$.

RESOLUÇÃO

(a) Vetor rotação absoluta do disco

É dado por:

$$\vec{\omega} = \omega_r\vec{k} + \omega_a\vec{\imath}$$

(0,5 ponto)

(b) Matriz de inércia do disco

No polo G, a matriz de inércia do disco, descrita no sistema de eixos $Gxyz$, é dada por:

$$[J_G] = \begin{bmatrix} m\dfrac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\dfrac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\dfrac{r^2}{2} \end{bmatrix}$$

(0,5 ponto)

(c) Quantidade de movimento angular do disco

No polo G a quantidade de movimento angular do disco é dada por:

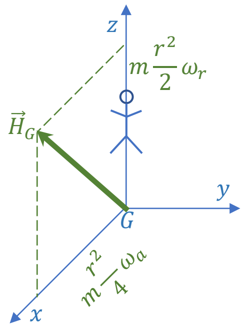
$$\vec{H}_G = [J_G]\cdot[\omega] = \begin{bmatrix} m\dfrac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\dfrac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\dfrac{r^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_a \\ 0 \\ \omega_r \end{bmatrix} = m\frac{r^2}{4}\omega_a\vec{\imath} + m\frac{r^2}{2}\omega_r\vec{k}$$

(0,5 ponto)

(d) Binário giroscópico aplicado ao disco pelo dispositivo $ABCG$

Como o disco é um corpo axissimétrico e homogêneo, o Teorema da Quantidade de Movimento Angular pode ser descrito no sistema de eixos $Gxyz$ solidário ao garfo e não ao disco.

Notando que $\vec{\omega}_a$ é o vetor rotação do sistema de referência móvel $Gxyz$ considerado, a expressão do Teorema da Quantidade de Movimento Angular assume a forma:



$$\vec{M}_G = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{O'XYZ} = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{Gxyz} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_G$$

em que $O'XYZ$ é o referencial inercial <u>não</u> indicado na figura.

Observe-se ainda que, para um observador ligado ao referencial móvel, $\vec{H}_G$ é um vetor invariante, dado que $|\vec{\omega}_a|$ e $|\vec{\omega}_r|$ são constantes e que esse observador: 1) não observa qualquer variação nos momentos de inércia do corpo durante seu movimento de rotação própria em torno do eixo Gz; 2) não observa qualquer variação na orientação dos versores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ durante o movimento do disco. Dessa forma,

$$\left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{Gxyz} = \vec{0}$$

e

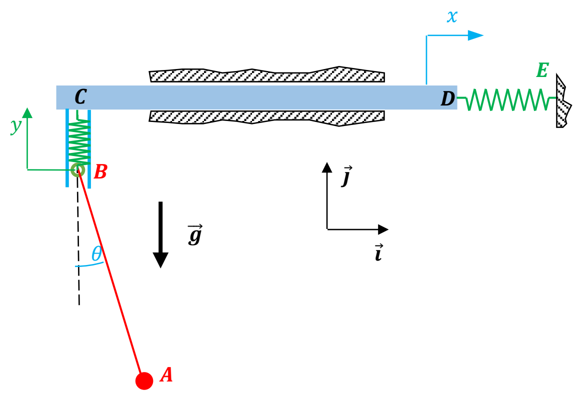
a expressão do Teorema da Quantidade de Movimento Angular adquire a forma simplificada

$$\vec{M}_G = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{O'XYZ} = \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_G$$

Portanto, o binário giroscópico aplicado ao disco pelo dispositivo $ABCG$ é dado por:

$$\vec{M}_G = \omega_a\vec{\imath} \wedge m\left(\frac{r^2}{4}\omega_a\vec{\imath} + \frac{r^2}{2}\omega_r\vec{k}\right) = -m\frac{r^2}{2}\omega_a\omega_r\vec{\jmath}$$

(1,5)



3ª Questão (3,5 pontos). O mecanismo plano ilustrado na figura compõe-se de: a) um pêndulo simples AB, de comprimento l e massa concentrada m em A; b) uma barra CD, de massa M; c) duas molas de constantes elásticas k_1 (BC) e k_2 (DE), ambas de massa desprezível.

A guia vertical que orienta a mola BC tem massa desprezível, está rigidamente ligada à barra CD e com ela se movimenta. A mola vertical BC é ligada ao ponto C da barra CD e ao ponto B da haste AB. A mola horizontal DE é ligada ao ponto fixo E e ao ponto D da barra CD. O atrito nos contatos é desprezível e as coordenadas x e y **são medidas a partir da configuração de equilíbrio estático do sistema**.

Adotando x, y e θ como coordenadas generalizadas do sistema, pede-se:

a) Escrever a função energia cinética;
b) Escrever a função energia potencial;
c) Deduzir as equações de movimento do sistema utilizando o método de Lagrange.

RESOLUÇÃO

a) Energia cinética do sistema

A barra CD realiza movimento de translação. Sua energia cinética é:

$$T^{PQR}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

A energia cinética do pêndulo é dada por:

$$T^{Pêndulo}=\frac{1}{2}mv_B^2+m\vec{v}_B\cdot[\vec{\omega}\wedge(G-B)]+\frac{1}{2}[\omega]^T\cdot[J_B]\cdot[\omega]$$

Sendo

$$\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{k}$$

$$G\equiv A$$

$$\vec{v}_B=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$$

a expressão acima se transforma em

$$T^{Pêndulo}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+m(\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j})\cdot\left[\dot{\theta}\vec{k}\wedge(A-B)\right]+\frac{1}{2}\cdot J_{Bz}\dot{\theta}^2$$

Como

$$(A-B)=l(\sin\theta\,\vec{i}-\cos\theta\,\vec{j})$$

e

$$J_{Bz}=ml^2$$

resulta

$$T^{Pêndulo} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) \cdot \left[\dot{\theta}\vec{k} \wedge l(\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j})\right] + \frac{1}{2} \cdot ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T^{Pêndulo} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) \cdot \left[\dot{\theta}l(\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{i})\right] + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T^{Pêndulo} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + ml\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Portanto, a energia cinética do sistema é:

$$T = T^{PQR} + T^{Pêndulo} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

(1,5)

b) Energia potencial do sistema

Tomando como referência a configuração de equilíbrio estático do sistema, a energia potencial é:

$$V = mgl(1 - \cos\theta) + mgy + \frac{1}{2}k_2x^2 + \frac{1}{2}k_1y^2$$

(1,0)

c) Equações do movimento do sistema

O lagrangeano do sistema é

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + ml\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k_2x^2 - \frac{1}{2}k_1y^2 - mg(l+y)$$

Para a coordenada x, os termos da equação de Lagrange são:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k_2x$$

Para a coordenada y, os termos da equação de Lagrange são:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + ml\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\sin\theta + ml\dot{\theta}^2\cos\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k_1y - mg$$

Para a coordenada θ os termos da equação de Lagrange são:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\left(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta - \dot{x}\sin\theta\,\dot{\theta} + \dot{y}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{\theta}(-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta) - mgl\sin\theta$$

Fazendo-se as devidas substiutuições, cvhega-se às equações diferenciais que governam o movimento do sistema, a saber:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + k_2x = 0$$
$$m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\sin\theta + ml\dot{\theta}^2\cos\theta + k_1y + mg = 0$$
$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta + g\sin\theta = 0$$

(1,0)