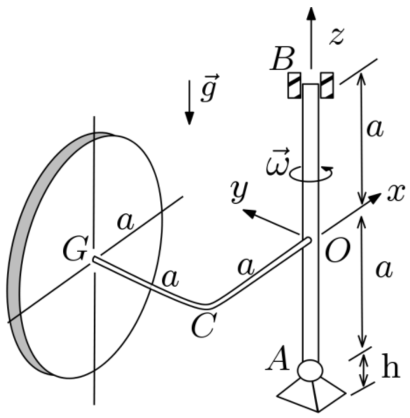
PME 3200 – MECÂNICA II – Prova Substitutiva – 19 de julho de 2022

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido utilizar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,5 pontos)

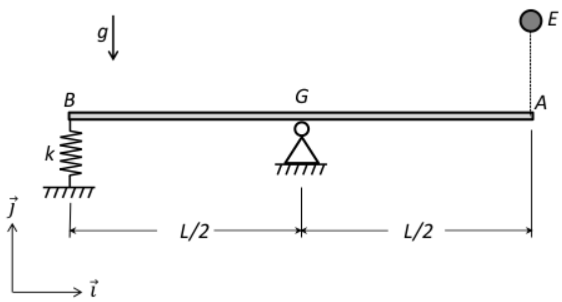
O *corpo rígido único* da figura ao lado é formado pelos seguintes componentes soldados entre si: um eixo AB de comprimento $2a$, duas hastes, OC e CG, ambas de comprimento a, e um disco homogêneo de raio a. O eixo e as hastes possuem massa desprezível, ao passo que o disco possui massa m. O corpo rígido é sustentado por uma articulação em A e por um mancal (anel) em B, ambos ideais, e gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ em torno do eixo AB. Utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$ solidário ao corpo (versores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) pedem-se, em função dos parâmetros a, m, g e ω:



a) a matriz de inércia J_G do disco com respeito ao polo G;
b) a matriz de inércia J_O do disco com respeito ao polo O;
c) o diagrama de corpo livre do corpo rígido;
d) utilizando o Teorema da Resultante e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular, obtenha as equações que permitem o cálculo das reações vinculares em A e em B.

Questão 2 (3,0 pontos)

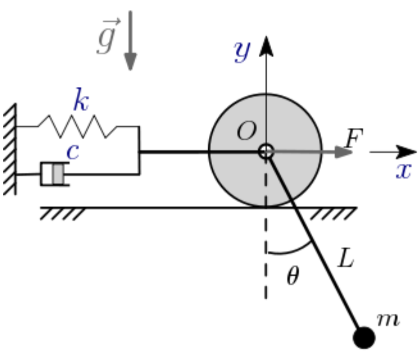
A pequena esfera E de massa $m/12$ e dimensões desprezíveis atinge a barra homogênea de massa m e comprimento L com velocidade vertical $\vec{v}_E = -v_E\vec{\jmath}$, conhecida, no ponto A. Dado o coeficiente de restituição e e sabendo-se que a barra está em repouso antes do choque, pedem-se:



a) o diagrama de impulsos agentes sobre o sistema;
b) o impulso $\vec{I}$ recebido pela esfera durante a colisão;
c) a velocidade da esfera $\vec{v}_E'$ e a velocidade angular ω' da barra imediatamente após a colisão.

Questão 3 (3,5 pontos)

No sistema ao lado, o disco homogêneo de centro O, massa M e raio R rola sem escorregar sobre o plano horizontal e está acoplado a uma superfície vertical rígida por meio de uma mola de rigidez k e de um amortecedor viscoso linear de constante c. Um pêndulo simples de massa m e comprimento L é ligado ao centro do disco por uma articulação ideal. A mola possui deformação nula quando a coordenada x vale zero. Uma força horizontal $F(t)$ *é aplicada ao centro do disco*. Utilizando x e θ como coordenadas generalizadas:



a) escreva a energia cinética do sistema;
b) escreva a energia potencial do sistema;
c) escreva a função de dissipação de Rayleigh do sistema;
d) utilizando o método de Lagrange, deduza as equações de movimento para as coordenadas x e θ.

RESOLUÇÃO

Questão 1 (3,5 pontos)

a) A matriz de inércia do disco com respeito ao polo G é central de inércia (portanto diagonal) e possui os seguintes momentos centrais de inércia:

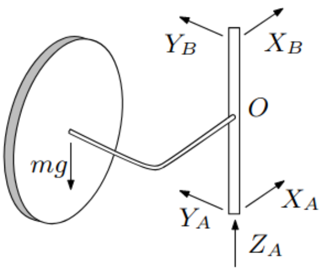
$$J_{Gx} = \frac{ma^2}{4}; \qquad J_{Gy} = \frac{ma^2}{2}; \quad J_{Gz} = \frac{ma^2}{4} \qquad (0{,}5)$$

b) Utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos tem-se:

$$(G - O) = a(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

$$J_O = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{4} + ma^2 & m.a.a & 0 \\ m.a.a & \frac{ma^2}{2} + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} + 2ma^2 \end{bmatrix} \qquad (0{,}5)$$

c) DCL (0,5)



d)
TR:

$$m\vec{a}_G = X_B\vec{\imath} + Y_B\vec{\jmath} + X_A\vec{\imath} + Y_A\vec{\jmath} + Z_A\vec{k} - mg\vec{k}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge \big(\vec{\omega} \wedge (G - O)\big) = a\omega^2(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \qquad (0{,}5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\imath}: ma\omega^2 = X_A + X_B \\ \vec{\jmath}: -ma\omega^2 = Y_A + Y_B \\ \vec{k}: Z_A = mg \end{array}\right\} \quad (0{,}5)$$

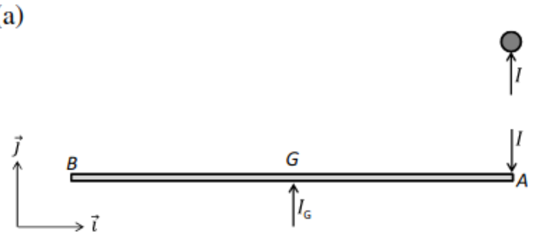
$$\vec{H}_O = \frac{9ma^2}{4}\omega\vec{k} \Longrightarrow \dot{\vec{H}}_O = \vec{0} = \vec{M}_O^e \qquad (0{,}5)$$

$$\vec{M}_O^e = (B - O) \wedge (X_B\vec{\imath} + Y_B\vec{\jmath}) + (A - O) \wedge \big(X_A\vec{\imath} + Y_A\vec{\jmath} + Z_A\vec{k}\big) + (G - O) \wedge \big(-mg\vec{k}\big)$$

$$\vec{M}_O^e = (-Y_B + Y_A - mg)a\vec{\imath} + (X_B - X_A - mg)a\vec{\jmath} = \vec{0} \qquad (0{,}5)$$

Questão 2 (3,0 pontos)

(a)



(0,5)

(b) e (c)

- TRI para a esfera: $\vec{L}+\vec{I}=\vec{L}' \Rightarrow -\frac{m}{12}v_E + I = \frac{m}{12}v'_E \Rightarrow \boxed{I=\frac{m}{12}\left(v'_E+v_E\right)}$ (1)

(0,5)

- TMI para a barra, pólo G: $\vec{K}_G + (A-G)\wedge\vec{I}_A = \vec{K}'_G \Rightarrow \vec{0}+\frac{L}{2}\vec{i}\wedge\left(-I\,\vec{j}\right) = J_G\omega'\vec{k}\Rightarrow$

$-\frac{L}{2}I=\frac{1}{12}mL^2\omega' \Rightarrow \boxed{\omega'=-\frac{6I}{mL}}$ (2) (0,5)

- Cinemática do CR: $\vec{v}'_A=\vec{\omega}'\wedge(A-G) \Rightarrow v'_A\vec{j}=\omega'\vec{k}\wedge\frac{L}{2}\vec{i}\Rightarrow \boxed{v'_A=\frac{\omega' L}{2}}$ (3)

- Choque: $\boxed{v'_A - v'_E = -e(v_A-(-(v_E)) = -ev_E}$ (4)(0,5)

- Solução do sistema:

(2) em (3) $\Rightarrow \boxed{v'_A=-\frac{3I}{m}}$ (5)

(5) em (4) $\Rightarrow \boxed{v'_E = -\left(\frac{3I}{m}-ev_E\right)}$ (6)

(6) em (1) $\Rightarrow \boxed{I=\frac{m}{15}(1+e)v_E \Rightarrow \vec{I}=\frac{m}{15}(1+e)v_E\vec{j}}$ (7)(0,5)

(7) em (6) $\Rightarrow \boxed{v'_E=-\frac{1-4e}{5}v_E\Rightarrow \vec{v}'_E=-\frac{1-4e}{5}v_E\vec{j}}$

(7) em (2) $\Rightarrow \boxed{\omega'=-\frac{2}{5}(1+e)\frac{v_E}{L}}$ (0,5)

Questão 3 (3,5 pontos)

a) Energia cinética:

$$T = T_D + T_A \quad (D: disco; \quad A: pêndulo)$$

Disco sem escorregamento (ponto de contato com o plano horizontal é o CIR):

$$T_D = \frac{1}{2} J_{cir} \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3MR^2}{2} \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3MR^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3M\dot{x}^2}{4} \qquad (0{,}5)$$

Energia cinética do pêndulo: $T_A = \frac{1}{2} m v_A^2$, com $\vec{v}_A = (\dot{x} + \dot{\theta} L \cos\theta)\vec{\imath} + (\dot{\theta} L \, sen\, \theta)\vec{\jmath} \Longrightarrow$

$$T_A = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} L cos\,\theta + \dot{\theta}^2 L^2) \qquad (0{,}5)$$

b) Energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + mgL(1 - cos\theta) \qquad (0{,}5)$$

c) Função de dissipação de Rayleigh:

$$R = \frac{1}{2} c\dot{x}^2 \qquad (0{,}5)$$

d)
Primeiro, é necessário obter a força generalizada não conservativa de natureza não Rayleighiana correspondente à coordenada generalizada x:

$$Q_x = F(t) \qquad (0{,}5)$$

Assim, as equações de Lagrange são dadas por:

- *para* x: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = Q_x \Rightarrow$

$$\left(\frac{3}{2} M + m\right)\ddot{x} + (mLcos\,\theta)\ddot{\theta} - mL\dot{\theta}^2 sen\theta + c\dot{x} + kx = F(t) \qquad (0{,}5)$$

- *para* θ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = Q_\theta \Rightarrow \; (mLcos\,\theta)\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} + mgL\, sen\theta = 0 \qquad (0{,}5)$