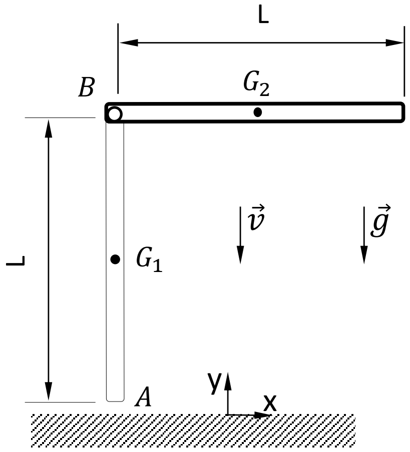
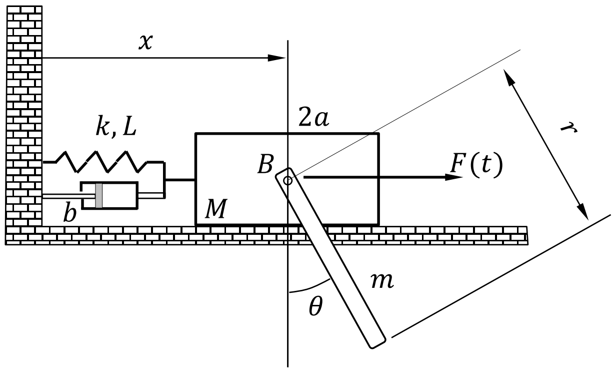
PME 3200 – MECÂNICA II – Prova Substitutiva – 25 de junho de 2019
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)



Questão 1 (3,5 pontos)
Considere o sistema mostrado na figura ao lado, composto pelas barras retas e homogêneas AB e BC, de comprimento L e cujas massas são, respectivamente, m e $2m$. As barras são unidas por uma articulação ideal em B. No instante mostrado, a configuração é tal que todo o sistema possui ato de movimento de translação retilínea com velocidade $\vec{v} = -v\vec{j}$ e o ângulo formado entre as barras é $\theta = \pi/2$. Sabendo-se que o choque entre a barra AB e o solo ocorre sem atrito e que o coeficiente de restituição entre esta barra e o solo vale e, pedem-se:

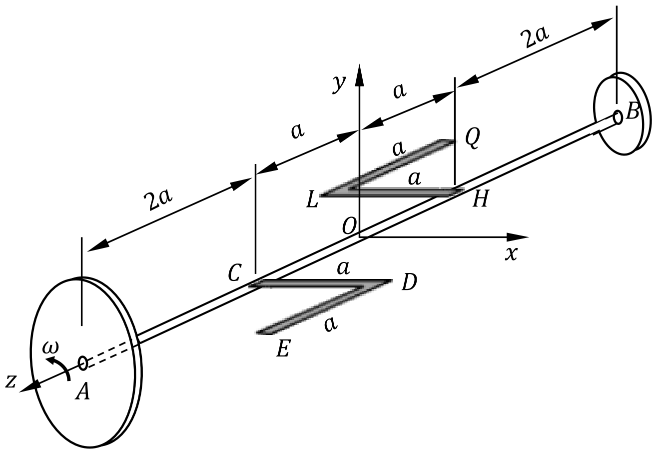
a) o diagrama de corpo livre das forças impulsivas para cada barra no instante do choque;
b) as velocidades $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}'_2$ dos centros de massa de cada barra imediatamente após o choque;
c) as velocidades angulares $\vec{\omega}'_1$ e $\vec{\omega}'_2$ de cada barra no instante imediatamente após o choque;
d) as forças impulsivas, externas e internas.

Questão 2 (3,5 pontos)
A figura representa um sistema dinâmico composto por um bloco de massa M e largura $2a$, que pode deslizar sem atrito sobre a superfície horizontal, e por uma haste homogênea de comprimento r e massa m vinculada em B por meio de um mancal isento de atrito. O bloco é também conectado ao anteparo vertical por meio de uma mola linear, de massa desprezível, comprimento livre (indeformado) igual a L e constante de rigidez k, e por um amortecedor cuja força dissipativa viscosa é linearmente proporcional à velocidade do bloco e que possui coeficiente de amortecimento b. Ao mesmo tempo, age sobre o bloco uma força dada pela equação $F(t) = Fo[1 + A\text{sen}(\omega t + u)]$, com Fo, A, u e ω conhecidos e constantes. Considere as coordenadas generalizadas (x, θ). Pede-se:



(a) construa as funções de energia cinética, $T = T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$, de energia potencial, $V = V(x, \theta)$, e de dissipação de Rayleigh, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\dot{x}, \dot{\theta})$, do sistema;
(b) deduza as equações de movimento do sistema a partir das equações de Lagrange;
(c) desconsiderando, por ora, a parcela oscilatória de F, determine a configuração de equilíbrio do sistema;
(d) linearize então as equações do sistema em torno da configuração de equilíbrio obtida no item (c), forçado com a parcela oscilatória de $F(t)$.

Questão 3 (3,0 pontos)

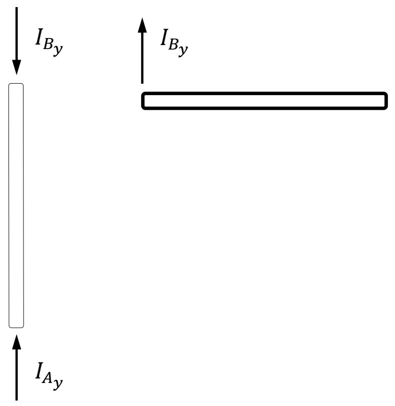


O eixo contínuo e homogêneo *AB* é sustentado por mancais ideais (não mostrados na figura) em *A* e em *B* e possui massa *6m*. Em *A* é soldado um disco homogêneo de raio *2a* e massa *4m*; em B é soldado outro disco, de raio *a* e massa *m*. Em *C* é soldada a peça rígida contínua *CDE*, formada por barras homogêneas *CD* e *DE*, ambas de massa *m*. Em *H* é soldada ao eixo a peça rígida contínua *HLQ*, formada por barras homogêneas *HL* e *LQ*, ambas de massa *m*. As peças *CDE* e *HLQ* são coplanares. O conjunto gira em torno do eixo *Oz* com velocidade angular constante de módulo ω. Pede-se, em função dos parâmetros dados, determinar as massas m_A e m_B e suas respectivas posições a serem adicionadas respectivamente à periferia dos discos de centros *A* e *B* de modo a tornar o conjunto dinamicamente balanceado.

Resolução

Questão 1 (3,5 pontos)

a) **(0,5)**



b, c, d)

A partir do diagrama de corpo livre, apliquemos o TRI e o TMI a cada um dos corpos:

TRI, barra AB

$$m(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = \left(I_{A_y} - I_{B_y}\right)\vec{j} \Rightarrow m\left(v'_{1_x}\vec{i} + v'_{1_y}\vec{j} - (-v\vec{j})\right) = \left(I_{A_y} - I_{B_y}\right)\vec{j}$$

Então: $\vec{i}$: $v'_{1_x} = 0$

$$\vec{j}: m\, v'_{1_y} = I_{A_y} - I_{B_y} - m\, v \Rightarrow v'_{1_y} = \frac{I_{A_y} - I_{B_y}}{m} - v \qquad (1)$$

TRI, barra BC

$$2m(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2) = -I_{B_y}\vec{j} \Rightarrow 2m\left(v'_{2_x}\vec{i} + v'_{2_y}\vec{j} - (-v\vec{j})\right) = I_{B_y}\vec{j}$$

Então: $\vec{i}$: $v'_{2_x} = 0$

$$\vec{j}: v'_{2_y} = \frac{I_{B_y}}{2m} - v \qquad (2)$$

((1) e (2): 0,5)

TMI, barra AB, polo G_1

$$J_{G_1}(\omega'_1 - \omega_1)\vec{k} = 0 \Rightarrow \omega'_1 = \omega_1 = 0$$

(0,5)

TMI, barra BC, polo G_2

$$J_{G_2}(\omega'_2 - \omega_2)\vec{k} = (B - G_2) \wedge (I_{B_y}\vec{j})$$

$$J_{G_2}(\omega'_2 - 0)\vec{k} = \frac{L}{2}(-\vec{i}) \wedge \left(I_{B_y}\vec{j}\right)$$

$$J_{G_2}(\omega'_{BC})\vec{k} = \frac{L}{2}\left(-I_{B_y}\right)\vec{k}$$

$$\frac{2mL^2}{12}\omega'_2 = -\frac{L}{2}I_{B_y} \Rightarrow \omega'_2 = -\frac{3}{mL}I_{B_y} \qquad (3)$$

(0,5)

Há 3 equações para 4 incógnitas. A equação adicional é obtida a partir da aplicação de hipótese de Newton e das relações cinemáticas devidas aos vínculos.

$$\vec{v}_A'.\vec{j} = -e\vec{v}_A.\vec{j} \Rightarrow \left(v_{A_x}'\vec{\imath} + v_{A_y}'\vec{j}\right).\vec{j} = \left(0\vec{\imath} + v_{A_y}'\vec{j}\right).\vec{j} = -e(-v\vec{j}).\vec{j}$$

$$v_{A_y}' = ev \qquad \textbf{(0,5)}$$

Relações cinemáticas:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_A' + \omega_1'\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\vec{j} = v_{A_y}'\vec{j} + \vec{0} = ev\vec{j} \quad \Rightarrow \boldsymbol{v_{1_y}'} = \boldsymbol{ev}$$

$$\vec{v}_B' = \vec{v}_A' + \omega_1'\vec{k} \wedge L\vec{j} = v_{A_y}'\vec{j} + \vec{0} = ev\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_B' + \omega_2'\vec{k} \wedge \frac{L}{2}(\vec{\imath}) = +ev\,\vec{j} + \omega_2'\frac{L}{2}\vec{j}$$

$$\Rightarrow v_{2_y}' = ev + \omega_2'\frac{L}{2} \qquad (4)\ \textbf{(0,5)}$$

As equações (1)-(4) acima devem ser resolvidas para as 4 incógnitas, v_{2_y}', I_{A_y} , I_{B_y} e ω_2' : **(solução das equações: 0,5)**

(1) $ev = \frac{I_{A_y} - I_{B_y}}{m} - v \Rightarrow I_{B_y} = I_{A_y} - mv(1+e) \quad (5)$

(4) em (2): $ev + \omega_2'\frac{L}{2} = \frac{I_{B_y}}{2m} - v \Rightarrow I_{B_y} = mL\omega_2' + 2m\,v(1+e) \quad (6)$

(6) em (3): $\omega_2' = -\frac{3}{mL}\left(mL\omega_2' + 2m\,v(1+e)\right) \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2'} = -\frac{\boldsymbol{3v(1+e)}}{\boldsymbol{2L}}$

Em (6): $I_{B_y} = mL\frac{-3v(1+e)}{2L} + 2mv(1+e) \Rightarrow \boldsymbol{I_{B_y}} = \frac{\boldsymbol{mv(1+e)}}{\boldsymbol{2}}$

Em (2): $v_{2_y}' = -\frac{mv(1+e)}{4m} - v \Rightarrow \boldsymbol{v_{2_y}'} = \frac{\boldsymbol{(e-3)v}}{\boldsymbol{4}}$

Em (5): $I_{A_y} = I_{B_y} + m(1+e)v = \frac{mv(1+e)}{2} + mv(1+e) \Rightarrow \boldsymbol{I_{A_y}} = \frac{\boldsymbol{3mv(1+e)}}{\boldsymbol{2}}$

Questão 2 (3,5 pontos)

(a)

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\dot{x}\vec{\imath}\,.\,\dot{\theta}\vec{k} \wedge \left(\frac{r}{2}\vec{u}_r\right) + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\dot{x}\ \frac{\dot{\theta}r}{2} + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}\frac{r}{2}\ cos\theta + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{3}\dot{\theta}^2 \qquad (0{,}5)$$

$$V = \frac{1}{2}k\big(x-(a+L)\big)^2 + \frac{mgr}{2}(1-cos\theta) \qquad (0{,}3)$$

$$R = \frac{1}{2}b\dot{x}^2 \qquad (0{,}2)$$

(b)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nc}$$

$$Q_j^{nc} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i.\frac{\partial P_i}{\partial q_j}$$

no caso, $\quad Q_x^{nc} = \vec{F}(t).\frac{\partial B}{\partial x} = F\vec{\imath}.\vec{\imath} = F(t)$

$$Q_\theta^{nc} = F\vec{\imath}.\vec{0} = 0 \qquad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + \frac{M\dot{\theta}r}{2}\cos\theta \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta}\frac{r}{2}\ cos\theta - m\,\dot{\theta}^2\frac{r}{2}\ sen\ \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k\big(x-(a+L)\big)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = b\dot{x}$$

Assim,

$$(M+m)\ddot{x} + \left(m\frac{r}{2}\cos\theta\right)\ddot{\theta} - m\dot{\theta}^2\frac{r}{2}\ sen\ \theta + b\dot{x} + k\big(x-(a+L)\big) = Q_x \qquad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{x}\frac{r}{2}\cos\theta + \frac{1}{3}\ mr^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\frac{r}{2}cos\theta\ddot{x} - m\dot{x}\dot{\theta}\frac{r}{2}sen\ \theta + \frac{1}{3}mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\dot{x}\dot{\theta}\frac{r}{2}\ sen\ \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\frac{r}{2}\ sen\ \theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

Assim:

$$\frac{1}{3}mr^2\ddot{\theta} + m\frac{r}{2}cos\theta\ddot{x} + mg\frac{r}{2}\ sen\ \theta = 0 \qquad (0{,}5)$$

As equações de movimento são, portanto,

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + \left(m\frac{r}{2}\cos\theta\right)\ddot{\theta} - m\dot{\theta}^2\frac{r}{2}\ sen\ \theta + b\dot{x} + kx = k(a+L) + F(t) \\ \frac{1}{3}mr^2\ddot{\theta} + m\frac{r}{2}cos\theta\ddot{x} + mg\frac{r}{2}\ sen\ \theta = 0 \end{cases}$$

(c) Se $F(t) = F_0$; no equilíbrio ($\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$) temos:

$$\begin{cases} k\bar{x} = k(a+L) + F_0 \Rightarrow \bar{x} = (a+L) + \frac{F_0}{k} \\ sen\ \bar{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 0\ (estável)\ ou\ \theta = \pi\ \ (instável) \end{cases} \qquad (0{,}5)$$

Linearizando as equações de movimento:

$$sen\ \theta \approx \theta; \quad \cos\theta \approx 1; \quad \dot{\theta}^2 \ll 1$$

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + \left(m\frac{r}{2}\cos\theta\right)\ddot{\theta} + b\dot{x} + k(x-\bar{x}) = F_0 A\ sen(\omega t + u) \\ \frac{1}{3}mr^2\ddot{\theta} + m\frac{r}{2}\ddot{x} + mg\frac{r}{2}\ \theta = 0 \end{cases} \qquad (0{,}5)$$

ou

$$\mathcal{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathcal{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \mathcal{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}(t)$$

com

$$\boldsymbol{Q}(t) = [x - \bar{x} \qquad \theta]^t$$
$$Q(t) = [F_0 A\ sen(\omega t + u) \quad 0]^t$$

e

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} (M+m) & m\frac{r}{2} \\ m\frac{r}{2} & \frac{1}{3}mr^2 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\frac{r}{2} \end{bmatrix}$$

Questão 3 (3,0 pontos)

Solução

Para simplificar a notação, designemos os segmentos da seguinte forma: ED – peça 1; DC – peça 2; HL – peça 3 e LQ – peça 4.

Conforme proposto, o conjunto já está estaticamente balanceado, uma vez que:
(i) as peças 1-2 e 3-4 ocupam o mesmo plano;
(ii) sendo homogêneos os discos A e B, as coordenadas de seus respectivos centros de massa pertencem ao eixo fixo.
A condição para que o conjunto esteja dinamicamente balanceado é que o eixo de rotação, no caso coincidente com O_z seja um eixo principal de inércia. Para tanto, os produtos de inércia dos quais o referido eixo participa devem ser nulos. No caso, utilizando o polo O sobre o eixo de rotação, deve-se ter $J_{O_{xz}} = J_{O_{yz}} = 0$.
Novamente, dado que os discos são homogêneos e que as peças 1-2 e 3-4 estão restritas ao plano O_{xy}, segue que $J_{O_{yz}} = 0$. **(0,5)**

Resta-nos, portanto, calcular $J_{O_{xz}}$ e adicionar as massas solicitadas de forma a anular este produto de inércia, porém sempre mantendo o centro de massa sobre o eixo de rotação. Para tanto, vamos utilizar o Teorema dos Eixos Paralelos para transportar os produtos de inércia de cada peça em relação a sistemas de coordenadas com polos em seus respectivos centros de massa G_1, G_2, G_3, G_4 e eixos paralelos aos do sistema $Oxyz$ até este sistema e a propriedade de composição para obter o produto de inércia $J_{O_{xz}}$. Assim:

peça 1: $J_{O_{xz1}} = J_{G1_{xz}} + m_1 x_1 z_1 = 0 + m.a.\frac{3a}{2} = \frac{3ma^2}{2}$ **(0,25)**

peça 2: $J_{O_{xz2}} = J_{G2_{xz}} + m_2 x_2 z_2 = 0 + m.\frac{a}{2}.a = \frac{ma^2}{2}$ **(0,25)**

peça 3: $J_{O_{xz3}} = J_{G3_{xz}} + m_3 x_3 z_3 = 0 + m.\left(-\frac{a}{2}\right).(-a) = \frac{ma^2}{2}$ **(0,25)**

peça 4: $J_{O_{xz4}} = J_{G4_{xz}} + m_4 x_4 z_4 = 0 + m.(-a).\left(-\frac{3a}{2}\right) = \frac{3ma^2}{2}$ **(0,25)**

Para os discos, ambos os produtos de inércia, dada sua homogeneidade e simetria na montagem, são nulos. Assim,

$$J_{O_{xz}} = J_{O_{xz1}} + J_{O_{xz2}} + J_{O_{xz3}} + J_{O_{xz4}} = 4ma^2$$

O produto de inércia do sistema deve se anular pela adição das massas na periferia dos discos A e B. A única maneira para que isso ocorra é adicionando-se:
m_A no ponto $(-2a, 0, 3a)$ **(0,25)**
m_B no ponto $(a, 0, -3a)$ **(0,25)**

Assim, impõem-se as condições $\bar{J}_{O_{xz}} = 0$ e $\bar{x}_G = 0$, que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\bar{J}_{O_{xz}} = 0 = 4ma^2 + m_A x_A z_A + m_B x_B z_B \Longrightarrow$$
$$4ma^2 + m_A(-2a)(3a) + m_B(a)(-3a) = 0 \Rightarrow$$
$$4ma^2 - 6m_A a^2 - 3m_B a^2 = 0 \quad (1)$$ **(0,25)**

$$\bar{x}_G = 0 \Rightarrow m_A(-2a) + m_B(a) = 0 \quad (2)$$ **(0,25)**

Resolvendo as equações (1) e (2) obtemos

$$m_A = \frac{m}{3}; \qquad m_B = \frac{2m}{3}$$ **(0,5)**