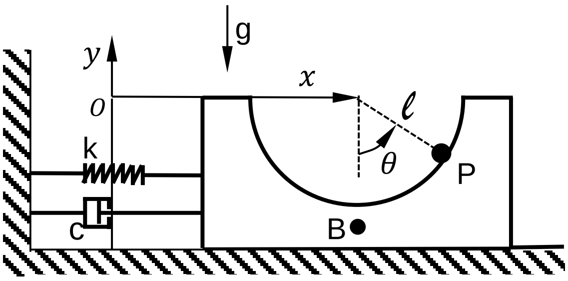
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – Prova substitutiva – 3 de julho de 2018
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de celulares, notebooks e dispositivos similares)



1ª Questão (3,5 pontos). Na figura ao lado, o bloco de massa *M* cujo centro de massa é *B* desliza sobre uma superfície horizontal sem atrito e é vinculado a um anteparo rígido e fixo por meio da mola linear de constante elástica *k* e pelo amortecedor viscoso linear de constante *c*. Sobre a semi-circunferência lisa de raio ℓ, uma pequena esfera de massa *m* desliza sem atrito. Considere a configuração do sistema dada pelas coordenadas generalizadas *x* (abscissa do centro de massa *B* do bloco) e θ (ângulo formado entre a vertical e a posição ocupada pela esfera sobre a semi-circunferência) e admita que *x=0* quando a mola não está deformada. Nessas condições, pedem-se, utilizando os parâmetros do problema:

(a) as expressões das velocidades do bloco e da esfera;
(b) as expressões da energia cinética e da energia potencial do sistema;
(c) a expressão da função de dissipação de Rayleigh do sistema;
(d) as equações de movimento do sistema, utilizando o método de Lagrange.

Solução:
(a) A velocidade do bloco é dada diretamente pela derivada temporal da coordenada generalizada x

$\therefore\ \vec{v}_B = \dot{x}\,\vec{\imath}$ (0,2)

Para a esfera, tem-se:

$$\vec{v}_P = \dot{x}\,\vec{\imath} + \frac{d}{dt}[\ell(sen\,\theta\,\vec{\imath} - \cos\,\theta\,\vec{\jmath})]$$

$\vec{v}_P = (\dot{x}\ + \ell\,\dot{\theta}\cos\,\theta)\,\vec{\imath} + \ell\,\dot{\theta}\,sen\,\theta\,\vec{\jmath}$ (0,3)

(b) A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2}(M\,||\vec{v}_B||^2 + m||\vec{v}_P\,||^2)$$

$$T = \frac{1}{2}(M\dot{x}^2 + m(\dot{x}^2 + 2\ell\,\dot{x}\dot{\theta}\cos\,\theta + \ell^2\,\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \ell^2\,\dot{\theta}^2\,sen^2\theta)$$

$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\,\ell\,\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\,\theta + \frac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2$ (0,5)

A energia potencial possui parcelas relativas ao elemento elástico e ao campo gravitacional:
Para o elemento elástico, a deformação é dada diretamente pela coordenada x. Assim:

$V_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ (0,2)

A energia potencial correspondente ao campo gravitacional, no sistema de coordenadas adotado (referência acima da posição da esfera) é:

$V_g = -mg\,\ell\cos\,\theta$ (0,5)

$$\therefore V = V_g + V_{el} = \frac{1}{2}kx^2 - mg\,\ell\cos\,\theta$$

(c) A função dissipação de Rayleigh é dada por:

$R = \frac{1}{2}c\,\dot{x}^2$ (0,3)

(d) Equações de movimento pelo método de Lagrange:
$L = T - V$ (função Lagrangeana)

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\,\ell\,\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\,\theta + \frac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 - (\frac{1}{2}kx^2 - mg\,\ell\cos\,\theta)$$

$\rightarrow L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\,\ell\,\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\,\theta + \frac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mg\,\ell\cos\,\theta$ (0,5)

As equações de Lagrange são obtidas a partir de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0, \qquad q_j = q_x, q_\theta$$

Para a coordenada x:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\dot{x} + m\,\ell\,\dot{\theta}\cos\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m\,\ell(\ddot{\theta}\cos\,\theta - \dot{\theta}^2\,sen\,\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

$\therefore\ (M+m)\ddot{x} + m\,\ell(\ddot{\theta}\cos\,\theta - \dot{\theta}^2\,sen\,\theta) + k\,x + c\,\dot{x} = 0$ (0,5)

Para a coordenada θ:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\,\ell\,\dot{x}\cos\,\theta + m\,\ell^2\,\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ell(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\,sen\,\theta) + m\ell^2\ddot{\theta}$$

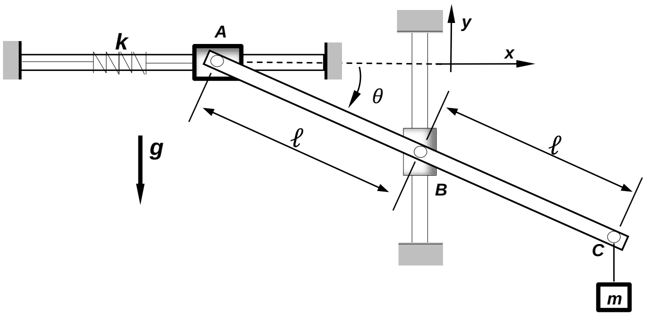
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\ell\,\dot{x}\dot{\theta}\,sen\,\theta - mg\,\ell\,sen\,\theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$\rightarrow\ m\ell(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\,sen\,\theta) + m\ell^2\ddot{\theta}\ +\ m\ell\,\dot{x}\dot{\theta}\,sen\,\theta + mg\,\ell\,sen\,\theta = 0$

$\therefore m\,\ell\,\ddot{x}\cos\theta + m\ell^2\ddot{\theta} + mg\,\ell\,sen\,\theta = 0$ (0,5)

2ª Questão (3,0 pontos). A barra ABC é vinculada por meio de articulações às luvas A e B, que podem deslizar sem atrito sobre os eixos horizontal e vertical, respectivamente. Entre a luva A e o anteparo existe uma mola de constante elástica k que envolve o eixo horizontal. Em C um corpo de massa m é suspenso por um cabo ideal. Sabe-se que, quando $\theta = 0$, a mola não está deformada. Considerando que o sistema esteja em equilíbrio na posição mostrada e desprezando quaisquer atritos obtenha, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, a equação que deve ser satisfeita nessa condição em função dos parâmetros dados. Considere desprezíveis as massas das luvas e da barra ABC.



Solução:

As forças que realizam trabalhos virtuais em deslocamentos compatíveis com os vínculos em A e em B são o pesso do corpo suspenso em C e a força que a mola exerce sobre a luva A. O sistema possui apenas um grau de liberdade, dado pela coordenada θ. Nas condições acima, o trabalho virtual de todas as forças ativas em deslocamentos virtuais compatíveis com esses vínculos, para o sistema em equilíbrio, é nulo. Assim, como a mola não está deformada quando a barra ABC está em posição horizontal tem-se:

(a) deslocamentos virtuais:

$\vec{r}_A = \ell(1 - \cos\theta)\vec{\imath} \Rightarrow \delta\vec{r}_A = \ell\, sen\,\theta\,\delta\theta\,\vec{\imath}$ (0,5) (0,5)

$\vec{r}_C = 2\ell(1 - \cos\theta)\vec{\imath} - 2\,\ell\, sen\,\theta\,\vec{\jmath} \;\Rightarrow \delta\vec{r}_C = 2\ell(sen\,\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath})\delta\theta$ (0,5)

(b) forças ativas:

$\vec{F}_{el} = -k\,\vec{r}_A = -k\,\ell(1 - \cos\theta)\vec{\imath}$ (0,5)
$\vec{P} = -mg\,\vec{\jmath}$ (0,5)

(c) aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$\delta\tau_{\mathrm{el}} + \delta\tau_P = 0$

$\vec{F}.\delta\vec{r}_A + \vec{P}.\delta\vec{r}_c = 0$ (0,5)

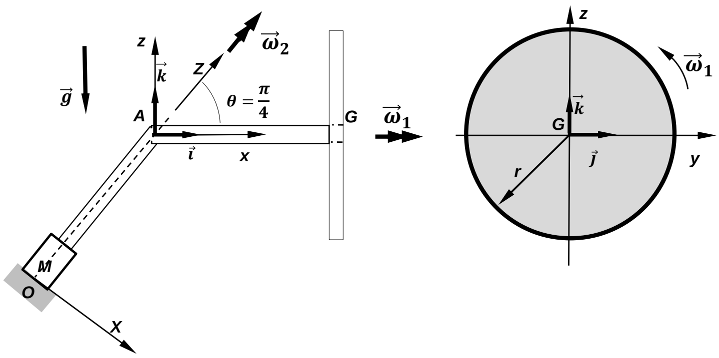
$-k\,\ell(1 - \cos\theta)\vec{\imath}.(\ell\, sen\,\theta\,\delta\theta\,\vec{\imath}) + (-mg\,\vec{\jmath}).2\ell(sen\,\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath})\delta\theta = 0$

$[-k\ell^2(1 - \cos\theta)sen\,\theta + 2mg\ell\cos\theta]\delta\theta = 0$

$\therefore\; -k\ell^2(1 - \cos\theta)sen\,\theta + 2mg\ell\cos\theta = 0$ (0,5)

3ª Questão (3,5 pontos)

Na figura ao lado, a haste delgada *OAG,* de massa desprezível, está ligada em *O* ao eixo de um motor *M*. Um disco homogêneo, de raio *r* e massa *m*, está acoplado à extremidade *G* por meio de um mancal, podendo assim girar livremente em relação à haste *OAG*. O disco gira com velocidade angular de módulo $|\vec{\omega}_1| = const$, em torno do eixo *Ox*, enquanto a haste gira em torno do eixo fixo *OZ*, inclinado de 45° em relação à horizontal com velocidade angular de módulo $|\vec{\omega}_2| = A\Omega\cos(\Omega t)$, com A, Ω constantes. O sistema de referência *Axyz* é solidário à haste *OAG.* Utilizando a base $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, pede-se:



(a) determinar o vetor rotação absoluta do disco;
(b) determinar a matriz de inércia do disco no pólo *G* expressa no referencial *Axyz* solidário à haste *OAG* ;
(c) determinar o momento da quantidade de movimento (quantidade de movimento angular) do disco no pólo *G* expresso no referencial *Axyz* solidário à haste *OAG*;
(d) aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao disco, no pólo *G*, determinar o binário giroscópico ativo a ele aplicado.

Solução:

(a) O vetor rotação absoluta do disco é:

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{\imath} + \omega_2\vec{K} = \omega_1\vec{\imath} + \omega_2\left[(\vec{K}.\vec{\imath}) + (\vec{K}.\vec{k})\vec{k}\right] = \omega_1\vec{\imath} + \omega_2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right] = \left[\omega_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_2\right]\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_2\vec{k}$$

Lembrando que $\left||\omega_2|\right| = A\Omega\cos(\Omega t)$ resulta

$\vec{\omega} = \left[\omega_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t)\right]\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t)\,\vec{k}$ (0,5)

(b) A matriz de inércia do disgo, no pólo G, expressa no sistema de eixos $Gxyz$ é:

$$[J]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix}$$ (0,5)

(c) o momento da quantidade de movimento do disco no pólo *G,* expresso no referencial *Axyz* ligado à haste é:

$$\vec{H}_G = [J_G]_{Axyz}\,[\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t) \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo a expressão acima resulta:

$\vec{H}_G = \frac{mr^2}{2}\left(\omega_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t)\right)\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}mr^2}{8}\,A\Omega\cos(\Omega t)\,\vec{k}$ (1,0)

(d) O Teorama do Momento da Quantidade de Movimento, no pólo G, se expressa como:

$$\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G|_{OXYZ} = \frac{d}{dt}\vec{H}_G|A_{xyz} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G = [J_G]_{Axyz}[\dot{\omega}] + \vec{\omega}_2 \wedge \{[J_G]_{Axyz}[\omega]\},$$

em que $\dot{\vec{H}}_G|_{OXYZ}$ é o binário giroscópico ativo, resultante do sistema de vetores $m_i\vec{a}_i$ de todas as partículas materiais m_i que constituem o disco. Desenvolvendo a expressão acima, obtém-se:

$$\vec{M}_G = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega^2\, sen\,(\Omega t) \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega^2\, sen\,(\Omega t) \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t)\,(\vec{\imath} + \vec{k}) \wedge \left\{\frac{mr^2}{2}\left[\omega_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t)\right]\quad\right\}$$

$$\vec{M}_G = -\frac{\sqrt{2}mr^2}{4}A\Omega^2\, sen(\Omega t)\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}mr^2}{8}A\Omega^2\, sen(\Omega t)\vec{k} - \frac{mr^2}{8}A\Omega^2\cos(\Omega t)\,\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{4}mr^2A\Omega\cos(\Omega t)\left[\omega_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}A\Omega\cos(\Omega t)\right]\vec{\jmath}$$

$$\vec{M}_G = -\frac{\sqrt{2}mr^2}{4}A\Omega^2\, sen(\Omega t)\vec{\imath} + \frac{mr^2}{8}A\Omega\cos(\Omega t)\left[A\Omega\cos(\Omega t) + 2\sqrt{2}\,\omega_1\right]\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{2}mr^2}{8}A\Omega^2\, sen(\Omega t)\vec{k} \qquad (1,5)$$