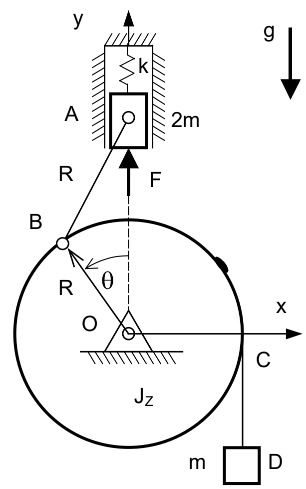
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica II – PME 3200 - Prova Substitutiva – 13/07/2017

Tempo de prova: 100 minutos (não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos)

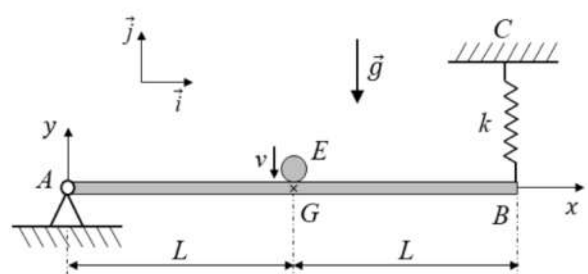
1º Questão (3,5 pontos)

O disco de raio R e massa $4m$ se movimenta no plano da figura em torno da articulação O. A barra AB de comprimento R e massa desprezível aciona o cilindro A de massa $2m$ guiado na vertical sem atrito. O cilindro é sustentado por uma mola de rigidez k. A mola não produz força quando $\theta = 0$. Um bloco D de massa m é sustentado por um fio ideal (inextensível e sem massa) enrolado na periferia do disco, tangenciando no ponto em C. Uma força $\vec{F}(t) = F(t)\,\vec{j}$ é aplicada em A tal que $|\theta| < \pi/4$. Utilizando θ como coordenada generalizada, determine:



(a) A energia cinética do sistema;
(b) A energia potencial do sistema e função dissipativa de Rayleigh;
(c) A força generalizada Q_θ;
(d) A equação diferencial de movimento usando o método de *Lagrange;*
(e) A equação linearizada do sistema.

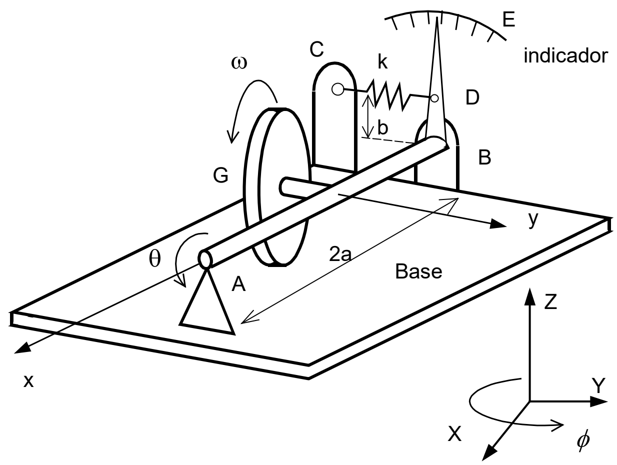
2º Questão (3,0 pontos) No sistema ilustrado na figura ao lado, uma barra homogênea AB, de comprimento 2L e massa M, é articulada em A e mantida suspensa e em repouso na posição horizontal por meio de uma mola linear ideal, de constante elástica k, fixa no ponto C. Em um dado instante, uma esfera de dimensões desprezíveis e massa m, choca-se com a barra na posição de seu baricentro G, com velocidade $\vec{v}_E = -v\vec{j}$. Desprezando os efeitos de atrito e admitindo que o coeficiente de restituição associado ao choque entre a esfera e a barra seja e $(0 \le e \le 1)$, determinar:



(a) o diagrama dos impulsos sobre a barra e sobre a esfera;
(b) a velocidade da esfera ($\vec{v}_E'$) e a velocidade angular da barra ($\vec{\omega}'$) para o instante imediatamente após o choque;
(c) as reações impulsivas na articulação A;
(d) a aceleração angular da barra ($\dot{\vec{\omega}}'$) para o instante imediatamente após o choque, considerando $e > 0$.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

3º Questão (3,5 pontos)

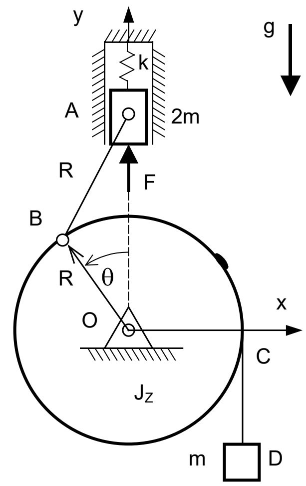


O disco de centro em G gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\,\vec{j}$ constante sobre a estrutura rígida $GABD$ de massa desprezível. A estrutura está articulada em A e apoiada em B e também pode girar com velocidade angular $\vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\,\vec{i}$ em torno do eixo x. Os apoios em A e B estão fixados na base que pode se movimentar com velocidade angular $\vec{\dot{\phi}}$ em torno do eixo vertical fixo $\vec{K}$, conforme mostrado na figura. A mola ideal de rigidez k, está fixada paralela à base entre os pontos C e D a uma distância b da linha horizontal passando por B. A mola de massa desprezível têm deformação nula na posição $\theta = 0$ incluindo o momento devido ao peso do disco quando o braço BD está na vertical e $\dot{\phi} = 0$. Considerando um movimento de arraste da base apenas em torno do seu eixo vertical $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi}\,\vec{K}$, a posição angular $\vec{\theta}$ da estrutura se alterada, permitindo a identificação da velocidade angular $\dot{\phi}$ no indicador angular E. Sabendo-se que a matriz de inércia do disco é diagonal com momentos centrais *I, J, I* e utilizando o sistema de coordenadas móvel *Gxyz* solidária à estrutura *GABD*, pede-se:

a) Determinar a velocidade angular absoluta do disco;
b) Deduzir as equações diferenciais do movimento angular do disco utilizando o Teorema da Quantidade do Movimento Angular (*TQMA*);
c) Obter a relação entre a velocidade angular $\dot{\phi}$ da base e o ângulo θ, admitindo pequena variação de θ; $\omega >> \dot{\phi}$ e desprezando o termo em $\ddot{\theta}$.

Resolução da 1º Questão (3,5 pontos)

O disco de raio R e massa $4m$ se movimenta no plano da figura em torno da articulação O. A barra AB de comprimento R e massa desprezível aciona o cilindro A de massa $2m$ guiado na vertical sem atrito. O cilindro é sustentado por uma mola de rigidez k. A mola não produz força quando $\theta = 0$. Um bloco D de massa m é sustentado por um fio ideal (inextensível e sem massa) enrolado na periferia do disco, tangenciando no ponto em C. Uma força $\vec{F}(t) = F(t)\,\vec{j}$ é aplicada em A tal que $|\theta| < \pi/4$. Utilizando θ como coordenada generalizada, determine:



a) A energia cinética do sistema;

$$T = T_A + T_O + T_D = \frac{1}{2} m_A \dot{y}_A^2 + \frac{1}{2} J_{O,z} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_D \dot{y}_D^2 \quad , \text{ onde}$$

$$J_{O,z} = \frac{4mR^2}{2} = 2mR^2 \quad \text{e} \quad (y_A - O) = 2R\cos\theta \;\rightarrow\; \dot{y}_A = -2R\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \quad \text{e} \quad \dot{y}_D = \dot{y}_C = -R\,\dot{\theta}$$

$$T = m \cdot 4R^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{T = \frac{1}{2}\left(4mR^2\,\text{sen}^2\,\theta + 3mR^2\right)\dot{\theta}^2} \qquad (1{,}0)$$

b) A energia potencial do sistema e função dissipativa de Rayleigh;

$$V = V_A + V_D + V_{mola} \;\rightarrow\; V_A = 2mg \cdot 2R\cos\theta \;\;;\;\; V_D = -mg \cdot R\theta \;\;;\;\; V_{mola} = \frac{1}{2}k\,y_A^2 = 2kR^2\cos^2\theta$$

$$\boxed{V = 4mgR\cos\theta - mg \cdot R\theta + 2kR^2\cos^2\theta} \qquad (0{,}5)$$

$\boxed{R = 0}$,

c) Força generalizada: $\delta W = \vec{F} \cdot \delta y_A \;\rightarrow\; \delta y_A = -2R\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \;\rightarrow\; \delta W = F(t) \cdot (-2R\cos\theta\,\delta\theta)$

$$\delta W = Q \cdot \delta q = Q_\theta \cdot \delta\theta = -F(t)2R\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \;\rightarrow\; \boxed{Q_\theta = -2F(t)R\,\text{sen}\,\theta} \qquad (0{,}5)$$

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}\left(4mR^2\,\text{sen}^2\,\theta + 3mR^2\right)\dot{\theta}^2 - 4mgR\cos\theta + mgR\theta - 2kR^2\cos^2\theta}$$

d) A equação diferencial de movimento usando o método de *Lagrange*;

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad \text{para } q_1 = \theta :$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(4mR^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 3mR^2\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 3mR^2\ddot{\theta} + 4mR^2 \operatorname{sen}^2 \theta\ddot{\theta} + 8mR^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 8mR^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + 4mgR\operatorname{sen}\theta - mgR + 4kR^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\boxed{\left(3mR^2 + 4mR^2 \operatorname{sen}^2 \theta\right)\ddot{\theta} + 8mR^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + 4mgR\operatorname{sen}\theta - mgR + 4kR^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2F(t)R\operatorname{sen}\theta}$$

(1,0)

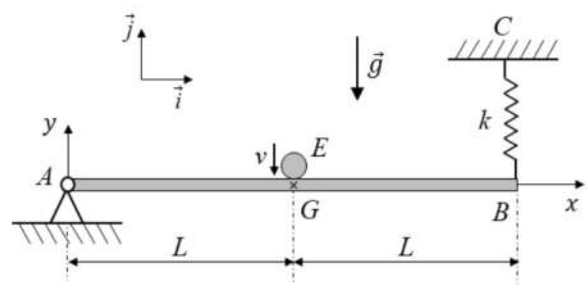
e) A **Equação linearizada**: $a_{\theta\theta}\ddot{\theta} + b_{\theta\theta}\theta = 0$, onde

$$a_{\theta\theta} = \alpha_{\theta\theta}(0) = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2}\right|_{\theta=0} = 3mR^2 \quad \text{e} \quad b_{\theta\theta} = \beta_{\theta\theta}(0) = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = -4mgR + 4kR^2$$

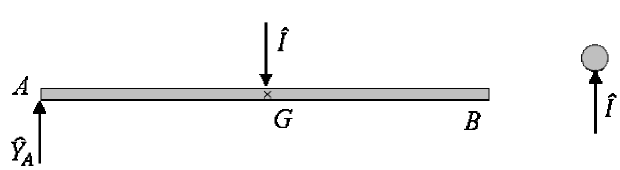
$$\boxed{3mR^2\ddot{\theta} + (4kR^2 - 4mgR)\theta = 0}$$

(0,5)

Resolução da 2º Questão (3,0 pontos) No sistema ilustrado na figura ao lado, uma barra homogênea AB, de comprimento 2L e massa M, é articulada em A e mantida suspensa e em repouso na posição horizontal por meio de uma mola linear ideal, de constante elástica k, fixa no ponto C. Em um dado instante, uma esfera de dimensões desprezíveis e massa m, choca-se com a barra na posição de seu baricentro G, com velocidade $\vec{v}_E = -v\vec{j}$. Desprezando os efeitos de atrito e admitindo que o coeficiente de restituição associado ao choque entre a esfera e a barra seja e $(0 \leq e \leq 1)$, determinar:



(a) Diagrama dos impulsos sobre a barra e sobre a esfera:



(0,5 ponto)

Observe a inexistência de impulso associado à força elástica da mola, uma vez que o choque é admitido instantâneo, não proporcionando assim mudança aparente na posição original dos corpos (não há deformação adicional da mola durante a ocorrência do choque).

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

(b) Velocidade da esfera ($\vec{v}'_E$) e a velocidade angular da barra ($\vec{\omega}'$) para o instante imediatamente após o choque:

Aplicando o TMI ao sistema (Barra + Esfera) em relação ao pólo *A* (fixo), tem-se:

$$\vec{H}'_A - \vec{H}_A = \Delta\vec{H}_A = \hat{\vec{M}}_A^{ext} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta\vec{H}_A = \underbrace{(G-A)\wedge m\Delta\vec{v}_E}_{\text{Esfera}} + \underbrace{(G-A)\wedge M\Delta\vec{v}_A + [I]_A\Delta\vec{\omega}}_{\text{Barra}} \\ \hat{\vec{M}}_A^{ext} = \vec{0}, \text{ para o sistema Barra + Esfera} \end{cases} \qquad \text{(b1)}$$

Relações cinemáticas: $\begin{cases} \Delta\vec{v}_E = (\vec{v}'_E - \vec{v}_E) = v'\vec{j} + v\vec{j} = (v'+v)\vec{j} \\ \Delta\vec{v}_A = (\vec{v}'_A - \vec{v}_A) = \vec{0}, \quad \text{articulação fixa} \\ \Delta\vec{\omega} = (\vec{\omega}' - \vec{\omega}) = \omega'\vec{k} \end{cases}$ (b2)

Substituindo (b2) em (b1), e considerando que $(G-A) = L\vec{i}$ e $J_{z_A} = \frac{4ML^2}{3}$, tem-se:

$$\left[mL(v'+v) + \frac{4ML^2}{3}\omega'\right]\vec{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad mL(v'+v) + \frac{4ML^2}{3}\omega' = 0 \qquad \text{(b3)}$$

A relação complementar entre v' e ω' é obtida através da aplicação da definição do coeficiente de restituição (modelo de Poisson) para o ponto de choque (ponto *G*):

$(\vec{v}'_G - \vec{v}'_E)\cdot\vec{n} = -e(\vec{v}_G - \vec{v}_E)\cdot\vec{n}$, onde $\vec{n}$ é o vetor unitário paralelo à linha de impacto

Utilizando as relações cinemáticas (b2) e observando que $\vec{n} \equiv \vec{j}$, obtém-se a seguinte relação entre v' e ω':

$$[(\omega' L)\vec{j} - (v')\vec{j}]\cdot\vec{j} = -e[-(-v\vec{j})]\cdot\vec{j} \quad \Rightarrow \quad (\omega' L - v' + ev) = 0 \qquad \text{(b4)}$$

Finalmente, a partir das equações (b3) e (b4) é possível determinar ω' e v', como segue:

$$\vec{\omega}' = \omega'\vec{k} = \left[-\frac{3mv(1+e)}{(4M+3m)L}\right]\vec{k} \text{ (1,0 ponto)} \qquad \vec{v}'_E = v'\vec{j} = \left[\left(\frac{4Me-3m}{4M+3m}\right)v\right]\vec{j} \text{ (0,5 ponto)} \qquad \text{(b5)}$$

(c) Reações impulsivas na articulação A:

Aplicando o TRI ao sistema (Barra + Esfera), tem-se:

$$\vec{Q}'_A - \vec{Q}_A = \Delta\vec{Q}_A = \hat{\vec{R}}^{ext} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta\vec{Q}_A = \underbrace{m\Delta\vec{v}_E}_{\text{Esfera}} + \underbrace{M\Delta\vec{v}_G}_{\text{Barra}} \\ \hat{\vec{R}}^{ext} = \hat{Y}_A\vec{j}, \end{cases} \qquad \text{(c1)}$$

Observe que, para o sistema (Barra + Esfera), o impulso $\hat{I}$ ilustrado nos diagramas do item (a) constitui

um <u>esforço interno</u> ao sistema, não influenciando, portanto, na determinação de $\vec{R}^{ext}$.
Considerando as relações cinemáticas definidas no item (b), a equação (c1) pode ser reescrita, como segue:

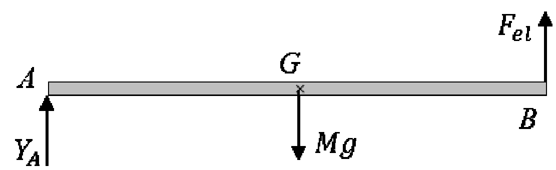
$$m(v'+v)\vec{\mathrm{j}} + (ML\omega')\vec{\mathrm{j}} = \hat{Y}_A\vec{\mathrm{j}} \quad \Rightarrow \quad \hat{Y}_A = m(v'+v) + (ML\omega') \qquad \text{(c2)}$$

Finalmente, substituindo (b4) em (c2), obtém-se a expressão da reação impulsiva na articulação *A*:

$$\hat{Y}_A = \frac{Mmv(1+e)}{4M+3m} \qquad \text{(c3)} \qquad \text{(1,0 ponto)}$$

(d) a aceleração angular da barra ($\dot{\vec{\omega}}'$) para o instante imediatamente após o choque, considerando $e > 0$.

Considere o diagrama de corpo livre ao lado ilustrando as <u>forças</u> atuantes na barra no instante imediatamente após o choque. Observe, neste caso, a presença da força peso e da força elástica, cujo efeitos não foram considerados anteriormente nas análises de choque, uma vez que os impulsos relacionados a esses esforços são desprezíveis.

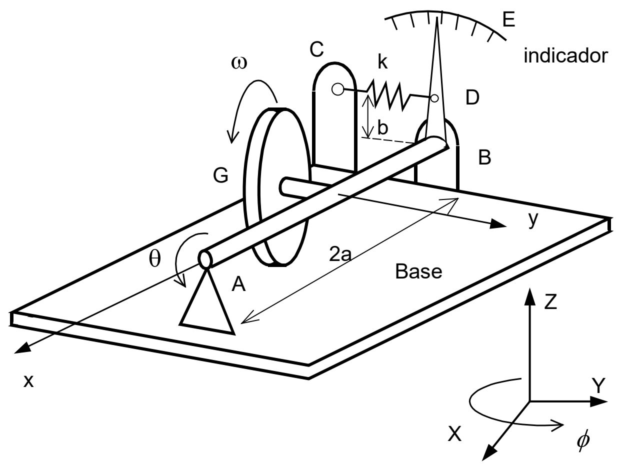


Aplicando o <u>TQMA à Barra</u> considerando o pólo A (fixo), a dinâmica posterior à colisão resulta em:

$$M(G-A)\wedge\vec{a}_A + \frac{^{\Re}d}{dt}\left([I]_A\vec{\omega}'\right) = \vec{M}_A^{ext} \quad \Rightarrow \quad \left(J_{z_A}\dot{\omega}'\right)\vec{\mathrm{k}} = (-MgL + F_{el}2L)\vec{\mathrm{k}}$$

Admitindo a hipótese de instantaneidade do choque, a mola não é sujeita a nenhuma deformação adicional no instante imediatamente após o impacto. Dessa forma, a magnitude de F_{el} permanece inalterada em relação ao instante imediatamente anterior ao choque, cujo valor corresponde à força necessário para manter a barra em equilíbrio na posição horizontal, ou seja, $F_{el} = \frac{Mg}{2}$. Dessa forma, substituindo essa relação na equação acima, conclui-se que $\dot{\vec{\omega}}' = \vec{0}$. (0,5 ponto)

Resolução da 3º Questão (3,5 pontos)



O disco de centro em G gira com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\,\vec{j}$ constante sobre a estrutura rígida *GABD* de massa desprezível. A estrutura está articulada em *A* e apoiada em *B* e também pode girar com velocidade angular $\vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\,\vec{i}$ em torno do eixo x. Os apoios em *A* e *B* estão fixados na base que pode se movimentar com velocidade angular $\vec{\dot{\phi}}$ em torno do eixo vertical fixo $\vec{K}$, conforme mostrado na figura. A mola ideal de rigidez k, está fixada paralela à base entre os pontos *C* e *D* a uma distância *b* da linha horizontal passando por *B*. A mola de massa desprezível têm deformação nula na posição $\theta = 0$ incluindo o momento devido ao peso do disco quando o braço BD está na vertical e $\dot{\phi} = 0$. Considerando um movimento de arraste da base apenas em torno do seu eixo vertical $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi}\,\vec{K}$, a posição angular $\vec{\theta}$ da estrutura se alterada, permitindo a identificação da velocidade angular $\dot{\phi}$ no indicador angular *E*. Sabendo-se que a matriz de inércia do disco é diagonal com momentos centrais *I, J, I* e utilizando o sistema de coordenadas móvel *Gxyz* solidária à estrutura *GABD*, pede-se:

a) Determinar a velocidade angular absoluta do disco.

$\vec{\Omega}_{abs} = \omega_{rel} + \omega_{arr} = (\dot{\theta}\,\vec{i} + \omega\,\vec{j}) + \dot{\phi}\,\vec{K}$ considerando o referencial móvel G$\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ e apenas o movimento angular constante da base no plano horizontal, ou seja $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi}\,\vec{K}$ e $\vec{K} = \cos\theta\,\vec{k} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$:

$$\vec{\Omega}_{abs} = \dot{\theta}\,\vec{i} + (\omega + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j} + \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{k} \qquad \text{(1,0 pontos)}$$

b) Deduzir as equações diferenciais do movimento angular do rotor utilizando o Teorema da Quantidade do Movimento Angular. Aplicando o *TQMA* no centro de massa *G* do disco:

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

$$\left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{OXYZ} = \frac{d}{dt}\left(\vec{H}_G\right)_{Gxyz} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G = \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \omega + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{bmatrix}\right) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{H}_G = \vec{M}_G$$

Considerando a velocidade angular de arrastamento $\dot{\phi}\vec{K} = \dot{\phi}(\cos\theta\,\vec{k} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j})$, a variação temporal dos versores do referencial móvel são:

$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \dot{\phi}(\cos\theta\,\vec{k} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}) \wedge \vec{i} = \cos\theta\,\dot{\phi}\,\vec{j} - \mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\phi}\,\vec{k}$;

$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = -\cos\theta\,\dot{\phi}\,\vec{i}$ e $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = \mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\phi}\,\vec{i}$ resultando em:

$$\boxed{\begin{aligned} & J_x\ddot{\theta} + (J_z - J_y)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - J_y\cos\theta\,\dot{\phi}\,\omega = M_x \\ & J_y\frac{d}{dt}(\omega + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta) + J_x\cos\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} = M_y \\ & J_z\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\cos\theta) - J_x\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} = M_z \end{aligned}}$$

(1,0 pontos)

Para massa desprezível da estrutura as reações dos mancais A e B produzem momento nas direções $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e o momento da mola na direção $\vec{i}$, considerada paralela à base e tem magnitude $M_x = -kb^2\,\mathrm{sen}\,\theta$ (0,5 pontos)

E torno de pequeno ângulo θ, a primeira equação resulta em:

$$J_x\ddot{\theta} + (J_z - J_y)\theta\dot{\phi}^2 - J_y\dot{\phi}\,\omega = -kb^2\theta$$ (0,5 pontos)

c) Obter a relação entre a velocidade angular $\dot{\phi}$ da base e o ângulo θ, admitindo pequena variação de θ ; $\omega >> \dot{\phi}$ e desprezando o termo em $\ddot{\theta}$. Para aceleração angular do disco desprezível ($\ddot{\theta} \approx 0$), o segundo termo da equação acima também é desprezível, resultando na relação de sensibilidade:

$$\boxed{\theta = \frac{J_y\,\omega}{k\,b^2}\dot{\phi}}$$

(0,5 pontos)

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886