

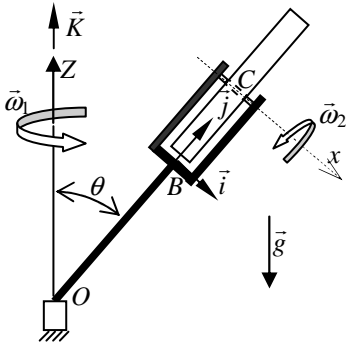


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME 3200 – MECÂNICA II – Prova substitutiva – 30 de junho de 2016

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de calculadoras, tablets e dispositivos similares)

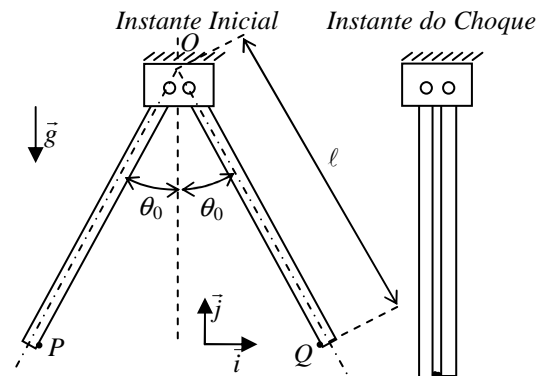
**QUESTÃO 1 (3,5 pontos).** O disco de massa  $m$  e raio  $r$  realiza movimento de rotação em torno do eixo  $Cx$  com  $\vec{\omega}_2 = -\omega_2 \vec{i}, \omega_2 \text{ const.}$ , ao mesmo tempo em que, arrastado pelo suporte  $OB$ , em forma de garfo gira em torno do



eixo fixo  $OZ$  com  $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{K}, \omega_1 \text{ const.}$ . Conhece-se a distância  $OC = \ell$ , admite-se que a massa do suporte  $OB$  seja desprezível e que os vínculos sejam isentos de atrito. Utilizando os versores da base móvel  $\vec{i} \vec{j} \vec{k}$  solidária ao suporte  $OB$ , pede-se:

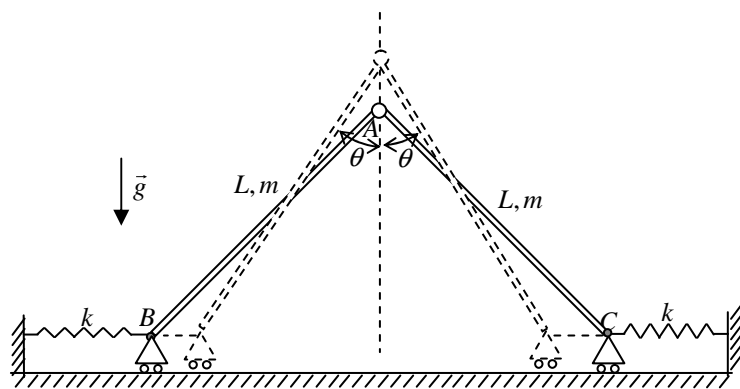
- o vetor rotação absoluta do disco;
- o momento da quantidade de movimento do disco, em relação ao pólo  $C$ ;
- a aceleração do ponto  $C$  do disco;
- a expressão do Teorema da Resultante para o disco;
- a expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para o disco, relativamente ao pólo  $C$ ;

**QUESTÃO 2 (3,0 pontos).** Duas barras  $OP$  e  $OQ$  de massas e comprimentos iguais, respectivamente, a  $m$  e  $\ell$ , são articuladas em  $O$ . Nas extremidades  $P$  e  $Q$  de ambas as barras existem pequenas saliências, conforme indicado na figura. Partindo do repouso em posições angulares simétricas  $\theta_0 = 60^\circ$ , medidas a partir do eixo vertical, as barras vêm a chocar-se no instante em que se alinham com a vertical. Graças às saliências em  $P$  e em  $Q$  não ocorre contato entre quaisquer outros pontos das barras que não  $P$  e  $Q$ . O coeficiente de restituição  $\underline{e}$  é dado). Pedem-se:



- a velocidade angular das barras no instante imediatamente anterior ao choque;
- os diagramas de impulsos nas barras;
- as velocidades angulares das barras e os impulsos reativos em  $O$  para o instante imediatamente posterior ao choque.

Obs: (1)  $J_{Oz} = \frac{m\ell^2}{3}$ ; (2) para o equacionamento, desprezar as espessuras das barras.



**QUESTÃO 3 (3,5 pontos).** Duas barras de iguais comprimentos e massas  $L$  e  $m$ , respectivamente, estão articuladas entre si no ponto  $A$  enquanto suas extremidades ligam-se aos suportes  $B$  e  $C$  (apóios simples) e a molas de mesma constante elástica  $k$ , presas a paredes verticais e restritas a deslocarem-se apenas na horizontal. A posição de equilíbrio estático do sistema corresponde à configuração em que ambas as barras formam com a vertical um ângulo  $\theta = 45^\circ$  (desenho em linha contínua). A figura desenhada em linhas tracejadas representa um estado do movimento do sistema

correspondente a um valor genérico de  $\theta$ . Admitindo comportamento simétrico em relação à reta vertical que passa pelo ponto  $A$ , pede-se determinar:

- a energia potencial do sistema;
- a energia cinética do sistema;
- a equação de movimento do sistema;
- a equação linearizada do sistema supondo que as barras realizem movimentos de pequena amplitude angular em torno da posição de equilíbrio (ou seja, que sejam pequenos os valores de  $\Delta\theta = \theta - \pi/4$ ).



### RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

O vetor rotação absoluta do disco, é:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{k} - \omega_2 \vec{i} = \omega_1 [(\vec{k} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{k} \cdot \vec{j})\vec{j}] - \omega_2 \vec{i} = \omega_1 (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) - \omega_2 \vec{i} = -(\omega_1 \sin \theta + \omega_2) \vec{i} + \omega_1 \cos \theta \vec{j}$$

(0,5 ponto)

A matriz de inércia do disco, em relação ao pólo  $C$  e descrita na base móvel  $\vec{i} \vec{j} \vec{k}$ , é:

$$[J]_C = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix}$$

O momento da quantidade de movimento do disco, relativamente ao pólo  $C$ , é:

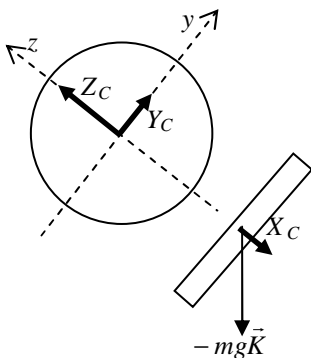
$$[H_C] = [J_C] \cdot [\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\omega_1 \sin \theta - \omega_2 \\ \omega_1 \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{2} (-\omega_1 \sin \theta - \omega_2) \vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_1 \cos \theta \vec{j}$$

(1,0 ponto)

A aceleração do ponto  $C$  do disco, é:

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_A + \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (C-A) + \omega_1 \vec{k} \wedge [\omega_1 \vec{k} \wedge (C-A)] = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge [\omega_1 \vec{k} \wedge \ell \vec{j}] \\ &= \omega_1 [(\vec{k} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{k} \cdot \vec{j})\vec{j}] \wedge [\omega_1 [(\vec{k} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{k} \cdot \vec{j})\vec{j}] \wedge \ell \vec{j}] \\ &= \omega_1 [-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}] \wedge [\omega_1 [-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}] \wedge \ell \vec{j}] = \omega_1 [-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}] \wedge [-\omega_1 \ell \sin \theta \vec{k}] \\ &= -\omega_1^2 \ell \sin \theta \cos \theta \vec{i} - \omega_1^2 \ell \sin^2 \theta \vec{j} \end{aligned}$$

(0,5 ponto)



O diagrama de corpo livre do disco é apresentado na figura ao lado.

Aplicando-se ao disco o Teorema da Resultante, tem-se:

$$-mg\vec{k} + X_C\vec{i} + Y_C\vec{j} + Z_C\vec{k} = m\vec{a}_C$$

$$\Rightarrow -mg(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) + X_C\vec{i} + Y_C\vec{j} + Z_C\vec{k} = m(-\omega_1^2 \ell \sin \theta \cos \theta \vec{i} - \omega_1^2 \ell \sin^2 \theta \vec{j})$$

(1,0 ponto)

Da equação vetorial acima, resultam 3 equações escalares:

$$mg \sin \theta + X_C = -m\omega_1^2 \ell \sin \theta \cos \theta$$

$$-mg \cos \theta + Y_C = -m\omega_1^2 \ell \sin^2 \theta$$

$$Z_C = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, obtêm-se:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

$$X_C = -m\omega_1^2 \ell \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta$$

$$Y_C = mg \cos \theta - m\omega_1^2 \ell \sin^2 \theta$$

$$Z_C = 0$$

Aplicando-se ao disco o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, relativamente ao seu centro de massa, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= \omega_1 \vec{K} \wedge [H_G] = \omega_1 (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \wedge \left[ \frac{mr^2}{2} (-\omega_1 \sin \theta - \omega_2) \vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_1 \cos \theta \vec{j} \right] \\ &= - \left[ \frac{mr^2}{4} \omega_1^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{mr^2}{2} \omega_1 \cos \theta (-\omega_1 \sin \theta - \omega_2) \right] \vec{k} \end{aligned}$$

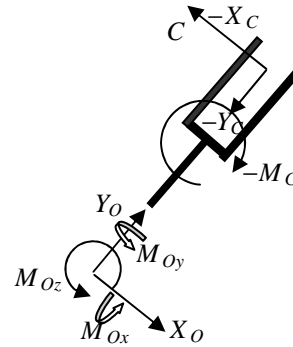
(0,5 ponto)

O diagrama de corpo livre do suporte é ilustrado na figura ao lado

Considerando-se que a massa do suporte é desprezível, os teoremas da Dinâmica, fornecem:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_O = X_C = -m\omega_1^2 \ell \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta \\ Y_O = Y_C = mg \cos \theta - m\omega_1^2 \ell \sin^2 \theta \\ Z_O = Z_C = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_{Ox} = 0 \\ M_{Oy} = 0 \\ M_{Oz} + M_G - X_C \ell = 0 \end{cases}$$



Da terceira equação acima, obtém-se:

$$M_{Oz} = (-m\omega_1^2 \ell \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta) \ell - \frac{mr^2}{4} \omega_1^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{mr^2}{2} \omega_1 \cos \theta (-\omega_1 \sin \theta + \omega_2)$$



**RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2**

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética entre os instantes inicial e o de ocorrência do choque, tem-se:

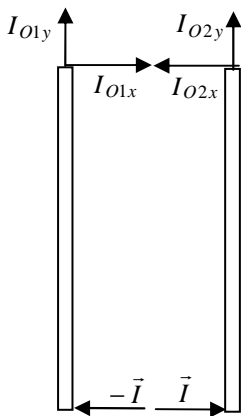
$$2 \cdot \left( \frac{1}{2} J_{O_z} \omega^2 \right) = 2mg \left( \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \cos \theta_0 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{m\ell^2}{3} \omega^2 = mg(\ell - \ell \cos 60^\circ) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \quad (1)$$

**(0,5 ponto)**

No instante do choque, a velocidade do centro de massa da barra que realiza movimento horário, é:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (G - O) = \vec{0} - \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \vec{k} \wedge \left( -\frac{\ell}{2} \vec{j} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g\ell}{2}} \vec{i} \quad (2)$$



No exato instante do choque, as barras ficam sujeitas aos impulsos indicados na figura ao lado.

**(1,0 ponto)**

Como as barras têm iguais massas e comprimentos e, além disso, partem de posições angulares simétricas em relação à reta vertical, conclui-se que estarão sujeitas a idênticos impulsos no instante do choque, ou seja:

$$|I_{O1x}| = |I_{O2x}| \quad (3)$$

$$I_{O1y} = I_{O2y} \quad (4)$$

Aplicando-se o Teorema da Resultante dos Impulsos à barra que realiza movimento horário, tem-se:

$$m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = \vec{I} \Rightarrow m \left( v'_{Gx} \vec{i} + v'_{Gy} \vec{j} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g\ell}{2}} \vec{i} \right) = \vec{I} + I_{Ox} \vec{i} + I_{Oy} \vec{j}$$

A equação vetorial acima produz duas equações escalares, a saber:

$$v'_{Gx} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g\ell}{2}} + \frac{I + I_{Ox}}{m} \quad (5)$$

$$v'_{Gy} = \frac{I_{Oy}}{m} \quad (6)$$

Aplicando-se o Teorema do Momento dos Impulsos à mesma barra, tem-se:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

$$J_{O_z}(\omega' - \omega)\vec{k} = (Q - O) \wedge I\vec{i} \Rightarrow \frac{m\ell^2}{3} \left( \omega' + \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \right) \vec{k} = -\ell\vec{j} \wedge I\vec{i}$$
$$\Rightarrow \omega' = \frac{3I}{m\ell} - \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \quad (7)$$

Aplicando-se a equação do campo de velocidades à barra, no instante imediatamente posterior ao choque, tem-se:

$$\vec{v}'_G = \vec{v}'_O + \omega'\vec{k} \wedge (G - O) = \vec{0} + \omega'\vec{k} \wedge \left( -\frac{\ell}{2}\vec{j} \right) = \omega' \frac{\ell}{2} \vec{i},$$

Da equação vetorial acima, resultam duas equações escalares, a saber:

$$v'_{Gx} = \omega' \frac{\ell}{2} \quad (8)$$

$$v'_{Gy} = 0 \quad (9)$$

A velocidade relativa de aproximação dos pontos  $P$  e  $Q$ , é:

$$u = \vec{v}_P \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_Q \cdot \vec{n}_2 = \vec{v}_P \cdot \vec{i} + \vec{v}_Q \cdot (-\vec{i}) = (\vec{v}_P - \vec{v}_Q) \cdot \vec{i} \quad (10)$$

e a velocidade relativa de afastamento entre os mesmos pontos, é:

$$u' = (\vec{v}'_P - \vec{v}'_Q) \cdot \vec{i} \quad (11)$$

A equação do campo de velocidades, aplicada aos pontos  $P$  e  $Q$  fornece:

$$\vec{v}_P = \omega\vec{k} \wedge (P - O) = \omega\vec{k} \wedge (-\ell\vec{j}) = \omega\ell\vec{i} \quad (12)$$

$$\vec{v}'_P = \omega'\vec{k} \wedge (P - O) = \omega'\ell\vec{i} \quad (13)$$

$$\vec{v}_Q = -\omega\vec{k} \wedge (Q - O) = -\omega\vec{k} \wedge (-\ell\vec{j}) = -\omega\ell\vec{i} \quad (14)$$

$$\vec{v}'_Q = -\omega'\vec{k} \wedge (Q - O) = -\omega'\ell\vec{i} \quad (15)$$

As equações (10), (12) e (14) fornecem:

$$u = 2\omega\ell \quad (16)$$

As equações (11), (13) e (15) fornecem:

$$u' = 2\omega'\ell \quad (17)$$

Da hipótese de Newton, tem-se:

$$u' = -eu$$
$$2\omega'\ell = -e \cdot 2\omega\ell \Rightarrow \omega' = -e\omega \quad (18)$$

As equações (4), (5) e (9) fornecem:

$$I_{Oy1} = 0 \quad (19)$$

$$I_{Oy2} = 0 \quad (20)$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

As equações (1) e (18) fornecem:

$$\bar{\omega}'_1 = -e\sqrt{\frac{3g}{2l}}\bar{k} : \text{ barra que se movia no sentido anti-horário antes do choque} \quad (21)$$

$$\bar{\omega}'_2 = e\sqrt{\frac{3g}{2l}}\bar{k} : \text{ barra que se movia no sentido horário antes do choque} \quad (22)$$

**(1,0 ponto)**

As equações (7) e (22) fornecem:

$$I = m\frac{1+e}{3}\sqrt{\frac{3gl}{2}} \quad (23)$$

As equações (8) e (22) fornecem:

$$v'_{Gx} = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{3gl}{2}} \quad (24)$$

As equações (3), (5), (23) e (24) fornecem:

$$I_{Ox1} = -I_{Ox2} = m\frac{1+e}{6}\sqrt{\frac{3gl}{2}} \quad (25)$$

**(0,5 ponto)**



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3**

Adotando-se  $\theta$  como coordenada generalizada de equilíbrio, a energia potencial para o sistema se escreve como

$$V = 2 \cdot \left[ m \frac{\ell}{2} g \cos \theta + \frac{k}{2} (x - x_0)^2 \right],$$

em que  $x - x_0$  é deformação da mola medida a partir da posição de equilíbrio  $x_0$  correspondente a  $\theta = 45^\circ$ , ou seja:

$$x - x_0 = \ell \left( \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (1)$$

Logo, resulta:

$$V = m \ell g \cos \theta + k \ell^2 \left( \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \quad (2)$$

**(1,0 ponto)**

Por causa da simetria do problema, a energia cinética do sistema de barras é dada por:

$$T = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} J_{Gz} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 \right] = J_{Gz} \dot{\theta}^2 + m v_G^2$$

Notando que, para a barra  $AB$ , tem-se:

$$\vec{v}_{GAB} = \vec{v}_B + \omega \vec{k} \wedge (G - B) = \dot{x} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge \frac{\ell}{2} (\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \left( \dot{x} - \dot{\theta} \frac{\ell}{2} \cos \theta \right) \vec{i} + \dot{\theta} \frac{\ell}{2} \sin \theta \vec{j} \quad (3)$$

Assim, resulta que:

$$T = \frac{m \ell^2}{12} \dot{\theta}^2 + m \left[ \left( \dot{x} - \dot{\theta} \frac{\ell}{2} \cos \theta \right)^2 + \dot{\theta}^2 \frac{\ell^2}{4} \sin^2 \theta \right] = \frac{m \ell^2}{3} \dot{\theta}^2 + m \dot{x}^2 - m \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

Da equação (1), tem-se:

$$\dot{x} = \ell \cos \theta \dot{\theta}$$

de modo que

$$T = \frac{m \ell^2}{3} \dot{\theta}^2 + m \ell^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 - m \ell^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 = \frac{m \ell^2}{3} \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

**(1,0 ponto)**

O Lagrangeano do sistema, é:

$$L = T - V = \frac{m \ell^2}{3} \dot{\theta}^2 - m \ell g \cos \theta - k \ell^2 \left( \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \quad (5)$$

A equação de Lagrange, representativa do movimento do sistema de barras, escreve-se como:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Assim, resulta:

$$\frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - m \ell g \sin \theta + 2k^2 \cos \theta \left( \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

**(1,0 ponto)**

A expressão quadrática da função energia potencial, em torno da posição de equilíbrio, é:

$$V \approx 2 \left( \frac{1}{2} c_{11} \theta^2 \right) = c_{11} \theta^2$$

em que

$$c_{11} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=45^\circ}$$

Calculando-se

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -m \ell g \sin \theta + 2k \ell^2 \left( \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -m \ell g \cos \theta + 4k \ell^2 \cos^2 \theta - 2k \ell^2 \left( \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin \theta$$

Assim, tem-se:

$$c_{11} = -m \ell g \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k \ell^2 \frac{1}{2}$$

A expressão quadrática aproximada da energia potencial, em torno da configuração de equilíbrio, é:

$$V = \left( -\ell g \frac{\sqrt{2}}{2} + k \ell^2 \right) \cdot \theta^2 \quad (7)$$

Portanto, a equação do movimento do sistema, linearizada em torno da posição de equilíbrio, é:

$$\frac{2}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} + \left( 4k \ell^2 \frac{1}{2} - \ell g \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \theta = 0 \quad (8)$$

**(0,5 ponto)**