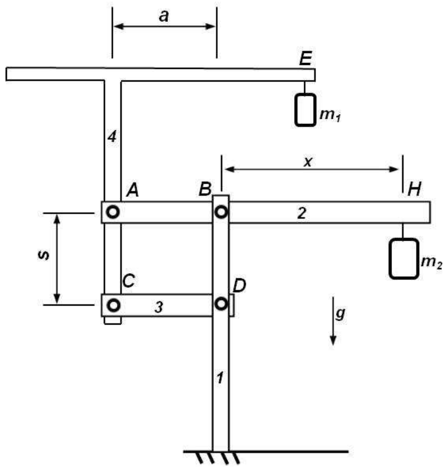
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Mecânica 2 – PME 3200 – Prova Substitutiva– 02/07/2015
Duração da Prova: 110 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e/ou outros equipamentos similares)

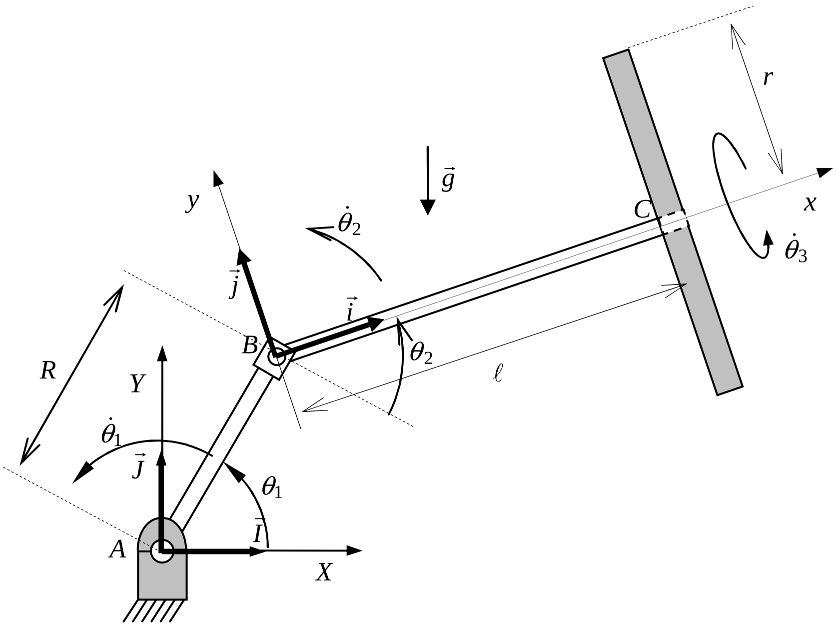
QUESTÃO 1 (3,0 pontos). O mecanismo da figura é baseado na Balança de Roberval. É formado pelas barras delgadas, contínuas 1, 2, 3 e pela peça 4, também contínua, em forma de “*T*”. Em *A*, *B*, *C* e *D* as peças são unidas por articulações ideais. A barra 1 é rigidamente ligada ao plano horizontal. Sabendo-se que, na ausência de cargas nos pontos *E* e *H* o sistema está em equilíbrio na posição mostrada, pede-se:

(a) o número de graus de liberdade do sistema;
(b) desenhar o mecanismo quando sujeito a pequenos deslocamentos compatíveis com os vínculos;
(c) determinar, em função dos parâmetros dados e utilizando o *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, o valor de $\boldsymbol{x}$ para que o equilíbrio se mantenha quando as massas $\boldsymbol{m_1}$ e $\boldsymbol{m_2}$ são acopladas ao sistema, através de cabos ideais, aos pontos *E* e *H*, respectivamente.



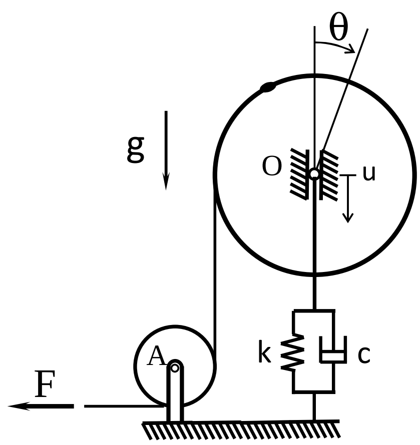
QUESTÃO 2 (4,0 pontos). O eixo AB, de massa desprezível, move-se com velocidade angular $\dot{\theta}_1\vec{K}$ constante vinculado por um pino B ao eixo BC, de massa desprezível . Este eixo, por sua vez, realiza movimento no plano XY transportando em sua extremidade C um disco de massa m e raio r que gira com velocidade angular $\dot{\theta}_3\vec{i}$ ($\dot{\theta}_3$ constante) em relação a BC. Utilizando a base de versores $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ solidários ao eixo BC, pede-se:

(a) a aceleração do ponto B ;
(b) a matriz de inércia do disco referida ao pólo B e descrita no sistema de eixos $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$;
(c) a equação diferencial que governa o movimento de θ_2 ;
(d) o binário aplicado pelo pino B ao eixo BC ;
(e) a força aplicada ao eixo BC pelo pino B .



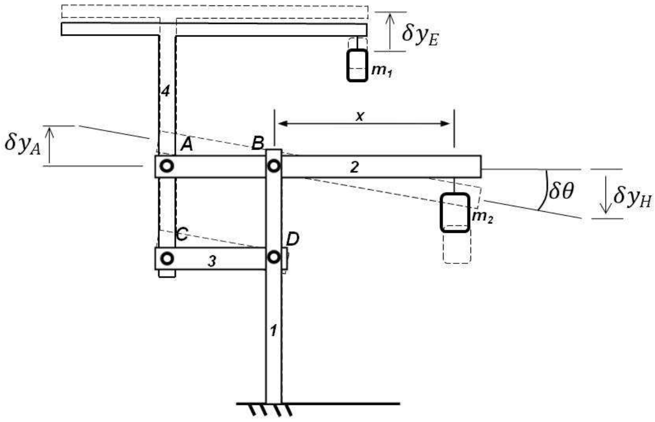
QUESTÃO 3 (3,0 pontos). No sistema mostrado na figura, o disco de centro *O* possui massa *M* e raio *R* e a polia de centro *A* tem massa *m* e raio *a*. O centro *O* do disco pode movimentar-se apenas na direção *u* e está acoplado a uma mola de rigidez *k* e a um amortecedor viscoso linear de constante *c*. Uma força horizontal *F* atua em um fio inextensível passante pela polia. Utilizando as coordenadas generalizadas *u* e θ e admitindo que a mola tem deformação nula quando as coordenadas *u* e θ valem zero, pede-se:

(a) a energia cinética do sistema;
(b) a energia potencial do sistema;
(c) a função dissipativa de *Rayleigh* do sistema;
(d) as equações de movimento para as coordenadas *u* e θ, usando o método de Lagrange.



QUESTÃO 1 – RESOLUÇÃO

(a) e (b)
A posição da estrutura sujeita ao deslocamento $\delta\theta$, compatível com as condições de vínculo, é mostrada ao lado (observação: a amplitude do deslocamento angular é exagerada para facilitar a visualização). Com base nessa figura, depreende-se que o sistema possui apenas 1 grau de liberdade.



(1,0 ponto)

(c)
As forças que realizam trabalho virtual devido ao deslocamento $\delta\theta$ são os pesos das massas ***m₁ e m₂*** em E e H. Pelo PTV:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i.\delta\vec{r}_i = -m_1 g.\delta y_E + m_2 g.\delta y_H = 0 \quad (1)$$

$$-m_1 g.\delta y_E + m_2 g.\delta y_H = -m_1 g.\delta y_E + m_2 g.x\delta\theta = 0 \quad (2)$$

Mas,

$$\delta y_A = a\delta\theta = \delta y_E \quad (3)$$

(3) em (2) fornece

$$\begin{aligned} -m_1 g.a\delta\theta + m_2 g.x\delta\theta &= 0 \\ (-m_1 a + m_2 x) g\delta\theta &= 0 \\ \implies x &= a\frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

(2,0 pontos)

QUESTÃO 2 - RESOLUÇÃO

A aceleração do ponto B é:

$$\vec{a}_B = \dot{\theta}_1 \vec{k} \wedge \left[\dot{\theta}_1 \vec{k} \wedge (B-A)\right] = \dot{\theta}_1 \vec{k} \wedge \left[\dot{\theta}_1 \vec{k} \wedge R\left(\sin\theta_2 \vec{i} + \cos\theta_2 \vec{j}\right)\right] = \dot{\theta}_1^2 R \vec{k} \wedge \left(\sin\theta_2 \vec{j} - \cos\theta_2 \vec{i}\right) = \dot{\theta}_1^2 R\left(-\sin\theta_2 \vec{i} - \cos\theta_2 \vec{j}\right)$$

(0,5 ponto)

A matriz de inércia do disco referida ao pólo B, é:

$$[J_B] = \begin{bmatrix} \dfrac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mr^2}{4} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mr^2}{4} + m\ell^2 \end{bmatrix}$$

(0,5 ponto)

O vetor rotação do disco, é:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}_1 \vec{k} + \dot{\theta}_2 \vec{k} + \dot{\theta}_3 \vec{i} = \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\vec{k} + \dot{\theta}_3 \vec{i}$$

O vetor aceleração rotacional do disco, é:

$$\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}_2 \vec{k} + \dot{\theta}_1 \vec{k} \wedge \dot{\theta}_2 \vec{k} = \ddot{\theta}_2 \vec{k}$$

(0,5 ponto)

Aplicando-se o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, referido ao pólo B, tem-se:

$$(C-B) \wedge m\vec{a}_B + [J_B] \cdot [\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_B] \cdot [\omega]\} = (C-B) \wedge \left(-mg\vec{J}\right) + \vec{M}_B$$

$$\Rightarrow \ell \vec{i} \wedge m\dot{\theta}_1^2 R\left(-\sin\theta_2 \vec{i} - \cos\theta_2 \vec{j}\right) + \begin{bmatrix} \dfrac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mr^2}{4} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mr^2}{4} + m\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\left[\dot{\theta}_3 \vec{i} + \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\vec{k}\right] \wedge \left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mr^2}{4} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mr^2}{4} + m\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right\} = \ell \vec{i} \wedge (-mg)\left[\left(\vec{J} \cdot \vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{J} \cdot \vec{j}\right)\vec{j}\right] + \vec{M}_B$$

$$\Rightarrow -m\ell\dot{\theta}_1^2 R\cos\theta_2 \vec{k} + \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2\right)\ddot{\theta}_2 + \left[\dot{\theta}_3 \vec{i} + \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\vec{k}\right] \wedge \begin{bmatrix} \dfrac{mr^2}{2}\dot{\theta}_3 \\ 0 \\ \left(\dfrac{mr^2}{4} + m\ell^2\right) \cdot \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \end{bmatrix} = \ell \vec{i} \wedge (-mg)\left\{\cos\left[180 - \left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]\vec{i} + \cos\left(\theta_1 + \theta_2 - 90\right)\vec{j}\right\} + \vec{M}_B$$

$$\Rightarrow -m\ell\dot{\theta}_1^2 R\cos\theta_2 \vec{k} + \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2\right)\ddot{\theta}_2 \vec{k} - \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2\right)\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_3 \vec{j} + \frac{mr^2}{2}\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_3 \vec{j} = -mg\ell\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\vec{k} + \vec{M}_B$$

Da equação vetorial acima obtêm-se:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\left(\frac{r^2}{4}+\ell^2\right)}\left[\ell\dot{\theta}_1^2 R\cos\theta_2 - g\ell\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$\left(\frac{mr^2}{4} - m\ell^2\right)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\dot{\theta}_3 = \vec{M}_B$$

(1,5 ponto)

A aceleração do ponto C do disco é dada por:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \ddot{\theta}_2\vec{k}\wedge(C-B) + \dot{\theta}_2\vec{k}\wedge\left[\dot{\theta}_2\vec{k}\wedge(C-B)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = \dot{\theta}_1^2 R\left(-\sin\theta_2\vec{i} - \cos\theta_2\vec{j}\right) + \ddot{\theta}_2\vec{k}\wedge\ell\vec{i} + \dot{\theta}_2\vec{k}\wedge\left[\dot{\theta}_2\vec{k}\wedge\ell\vec{i}\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = \dot{\theta}_1^2 R\left(-\sin\theta_2\vec{i} - \cos\theta_2\vec{j}\right) + \ddot{\theta}_2\ell\vec{j} - \ell\dot{\theta}_2^2\vec{i}$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = -\left[R\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \ell\dot{\theta}_2^2\right]\vec{i} + \left\{\frac{4\ell}{r^2+4\ell^2}\left[\ell\dot{\theta}_1^2 R\cos\theta_2 - g\ell\sin(\theta_1+\theta_2) - R\cos\theta_2\dot{\theta}_1^2\right]\right\}\vec{j}$$

Aplicando-se o Teorema do Movimento do Baricentro ao sistema constituído pelo disco e pela barra BC tem-se:

$$m\vec{a}_C = -mg\vec{J} + \vec{F}_B$$
$$\Rightarrow \vec{F}_B = mg\left[-\cos(\theta_1+\theta_2)\vec{i} + \sin(\theta_1+\theta_2)\vec{j}\right] - m\left[R\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \ell\dot{\theta}_2^2\right]\vec{i} + m\left\{\frac{\ell}{r^2+4\ell^2}\left[\ell\dot{\theta}_1^2 R\cos\theta_2 - g\ell\sin(\theta_1+\theta_2) - R\cos\theta_2\dot{\theta}_1^2\right]\right\}\vec{j}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_B = -m\left[g\cos(\theta_1+\theta_2) + R\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \ell\dot{\theta}_2^2\right]\vec{i} + m\left\{g\sin(\theta_1+\theta_2) + \frac{\ell}{r^2+4\ell^2}\left[\ell\dot{\theta}_1^2 R\cos\theta_2 - g\ell\sin(\theta_1+\theta_2) - R\cos\theta_2\dot{\theta}_1^2\right]\right\}\vec{j}$$

(1,0 ponto)

QUESTÃO 3 – RESOLUÇÃO

Adotando-se que a orientação da polia seja definida por um ângulo φ, e sendo o fio ideal, tem-se:

$$\varphi a = R\theta - u \qquad \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R\dot{\theta} - \dot{u}}{a}$$

(a) $E = E_{polia} + E_{disco} \quad \Rightarrow E = \frac{1}{2} J_{z_A}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M V_O{}^2 + \frac{1}{2} J_{z_O}\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\frac{\left(R\dot{\theta} - \dot{u}\right)^2}{a^2} + \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4}(m+M)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR\dot{\theta}\,\dot{u} + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2} + M\right)\dot{u}^2} \qquad \textbf{(1,0)}$$

(b) $V = V_{Grav} + V_{Elastica} \quad \Rightarrow \boxed{V = -Mgu + \frac{1}{2}ku^2}$ **(0,5)**

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4}(m+M)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR\dot{\theta}\,\dot{u} + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2} + M\right)\dot{u}^2 + Mgu - \frac{1}{2}ku^2$$

(c) $\boxed{R = \frac{1}{2}c\dot{u}^2}$ **(0,5)**

(d) Forças generalizadas: $\delta W = F\delta x$, em que $x = u - R\theta$

$$\Rightarrow \boxed{Q_u = F\frac{\partial x}{\partial u} = F} \quad \text{e} \quad \boxed{Q_\theta = F\frac{\partial x}{\partial \theta} = -FR} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Equação de Lagrange, coordenada *u:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = -\frac{1}{2}mR\dot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + M\right)\dot{u} \;\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = -\frac{1}{2}mR\ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + M\right)\ddot{u} \;\; ; \;\; \frac{\partial L}{\partial u} = Mg - ku \;\; ; \;\; \frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = c\dot{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{m}{2} + M\right)\ddot{u} - \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} - Mg + ku + c\dot{u} = F}$$

Equação de Lagrange, coordenada *θ:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{(m+M)}{2}R^2\dot{\theta} - \frac{mR\dot{u}}{2} \;\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{(m+M)}{2}R^2\ddot{\theta} - \frac{mR\ddot{u}}{2} \;\; ; \;\; \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(m+M)}{2}R^2\ddot{\theta} - \frac{mR\ddot{u}}{2} = -FR} \qquad \textbf{(0,5)}$$