

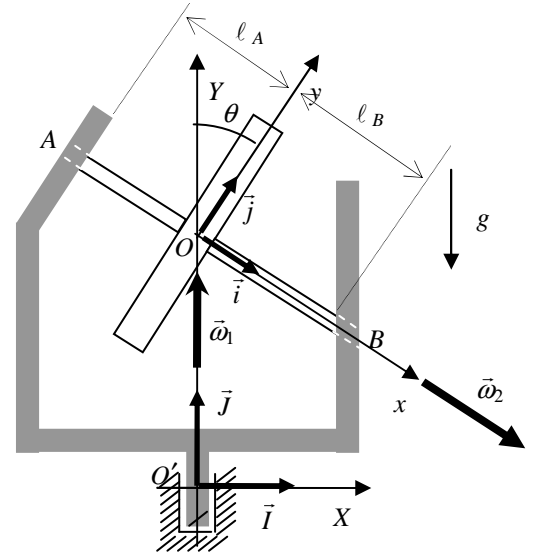


**MECÂNICA B PME-2200 Prova Substitutiva – 07/07/2014**

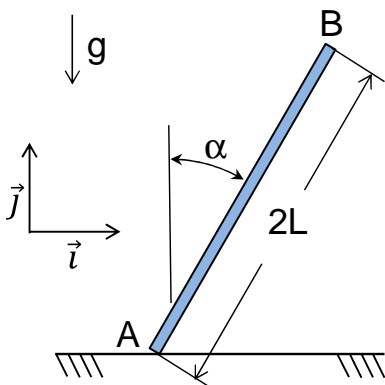
**Duração da Prova: 110 minutos.**

**(Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos)**

**QUESTÃO 1** (3,5 pontos) No mecanismo ilustrado na figura, o disco de massa  $m$  e raio  $r$ , solidário ao eixo  $AB$ , gira com velocidade angular  $\omega_2$  em relação à estrutura em forma de garfo que, por sua vez, gira com velocidade angular  $\omega_1$  em torno do eixo fixo vertical  $OY$ . Admitindo-se que o eixo  $AB$  tenha massa desprezível e adotando-se o sistema de eixos  $Oxyz$  no qual  $Ox$  é solidário ao eixo  $AB$  e  $y$  permanentemente se mantém no plano  $OxY$ , pede-se determinar:



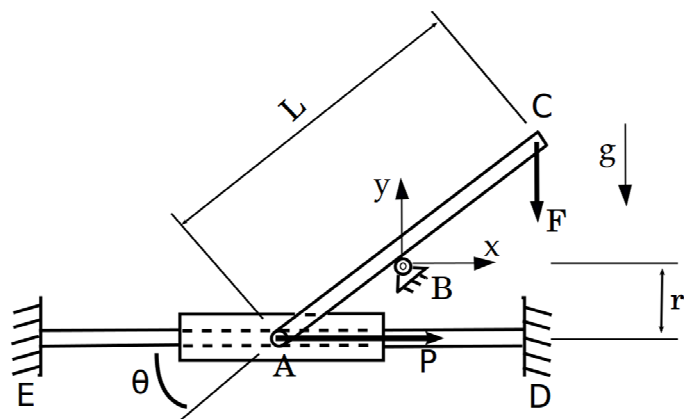
- a matriz de inércia do disco, em relação ao polo  $O$ ;
- o vetor rotação absoluta do disco;
- o momento da quantidade de movimento do disco em relação ao polo  $O$ ;
- a energia cinética do disco;
- o diagrama de corpo livre do disco acoplado ao eixo  $AB$  e as reações nos mancais  $A$  e  $B$ .



**QUESTÃO 2** (3,5 pontos) Uma barra homogênea  $AB$  de massa  $m$  e comprimento  $2L$ , inclinada de um ângulo  $\alpha$  em relação à vertical, cai em movimento de translação e atinge o solo com velocidade vertical  $V$ . O choque é anelástico e não há atrito entre a barra e o solo. Pedem-se, **para o instante imediatamente posterior ao impacto**, usando a base indicada na figura:

- a velocidade do baricentro da barra;
- a velocidade angular da barra;
- a força de contato em  $A$ ;
- o valor mínimo da velocidade  $V$  para o qual a barra perde o contato com o solo em  $A$ .

**QUESTÃO 3** (3,0 pontos) Sobre a guia  $ED$  horizontal pode deslizar uma luva conforme mostra a figura. A barra delgada  $AC$  é articulada na luva através do vínculo ideal  $A$  e não perde o contato com o rolete  $B$ . No ponto  $C$  é aplicada uma força  $F$  vertical. Despreze as massas da barra, da luva e todas as forças de atrito. Utilizando o PTV determine, em função de  $F$  e dos parâmetros  $L$ ,  $r$  e  $\theta$ , a força  $P$  indicada na figura, a ser aplicada em  $A$ , para que o sistema se mantenha em equilíbrio na configuração mostrada.



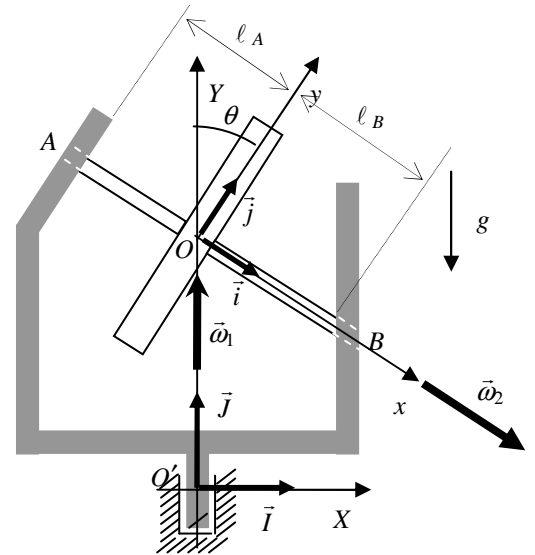


**MECÂNICA B PME-2200 Prova Substitutiva – 07/07/2014**

**Duração da Prova: 110 minutos.**

**(Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos)**

**Resolução da questão 1** (3,5 pontos) No mecanismo ilustrado na figura, o disco de massa  $m$  e raio  $r$ , solidário ao eixo  $AB$ , gira com velocidade angular  $\omega_2$  em relação à estrutura em forma de garfo que, por sua vez, gira com velocidade angular  $\omega_1$  em torno do eixo fixo vertical  $OY$ . Admitindo-se que o eixo  $AB$  tenha massa desprezível e adotando-se o sistema de eixos  $Oxyz$  no qual  $Ox$  é solidário ao eixo  $AB$  e  $y$  permanentemente se mantém no plano  $OxY$ , pede-se determinar:



- a) a matriz de inércia do disco, em relação ao polo  $O$  ;
- b) o vetor rotação absoluta do disco;
- c) o momento da quantidade de movimento do disco em relação ao polo  $O$  ;
- d) a energia cinética do disco;
- e) o diagrama de corpo livre do disco acoplado ao eixo  $AB$  e as reações nos mancais  $A$  e  $B$  .

A matriz de inércia do disco, relativa ao polo  $O$  e descrita no sistema de eixos  $Oxyz$  , é:

$$[J_O] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix}$$

**Resposta (a):**  $\frac{1}{2}$  ponto

O vetor rotação instantânea do disco é dado por:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{J} + \omega_2 \vec{i} = \omega_1 [(\vec{J} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{J} \cdot \vec{j})\vec{j}] + \omega_2 \vec{i}$$

Desenvolvendo-se a expressão vetorial acima, obtém-se:

$$\vec{\omega} = \omega_1 [\cos(90 + \theta)\vec{i} + \cos \theta \vec{j}] + \omega_2 \vec{i} = (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta)\vec{i} + \omega_1 \cos \theta \vec{j}$$

**Resposta (b):**  $\frac{1}{2}$  ponto

O vetor momento da quantidade de movimento do disco em relação ao polo  $O$  e descrito no sistema de eixos  $Oxyz$  é dado por:



$$\vec{H}_O = [J_O] \cdot [\omega] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 - \omega_1 \sin \theta \\ \omega_1 \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{mr^2}{2} (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta) \vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_1 \cos \theta \vec{j}$$

**Resposta (c):**  $\frac{1}{2}$  ponto

A energia cinética do disco é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \vec{H}_O \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \frac{mr^2}{2} (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta) \vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_1 \cos \theta \vec{j} \right] \cdot [(\omega_2 - \omega_1 \sin \theta) \vec{i} + \omega_1 \cos \theta \vec{j}]$$

$$\Rightarrow T = \frac{mr^2}{4} \left[ (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 \cos^2 \theta \right]$$

**Resposta (d):**  $\frac{1}{2}$  ponto

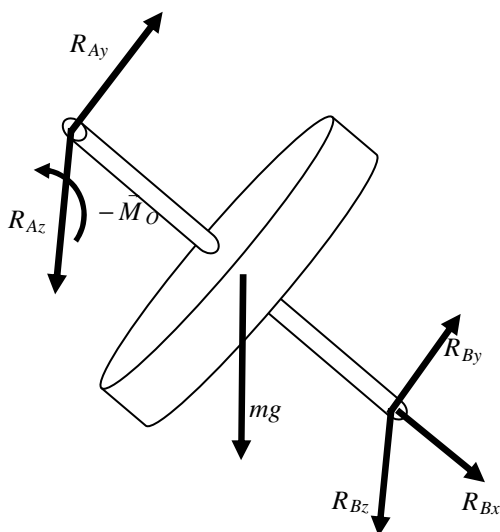
O momento das forças externas em  $O$ , é dado por:

$$\vec{M}_O = [J_O] \cdot [\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{ [J_O] \cdot [\omega] \} = \vec{\omega} \wedge [\vec{H}_O] = [(\omega_2 - \omega_1 \sin \theta) \vec{i} + \omega_1 \cos \theta \vec{j}] \wedge \left[ \frac{mr^2}{2} (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta) \vec{i} + \frac{mr^2}{4} \omega_1 \cos \theta \vec{j} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = -\frac{mr^2}{4} \omega_1 \cos \theta (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta) \vec{k} \text{ (binário ativo)}$$

**Resposta (e-1):**  $\frac{1}{2}$  ponto

O diagrama de corpo livre do disco é esboçado na figura a seguir:



**Resposta (e-2):**  $\frac{1}{2}$  ponto

Aplicando-se as equações de equilíbrio ao disco acoplado à barra  $AB$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:



$$mg \cos \theta + R_{Bx} = 0 \quad (1)$$

$$-mg \sin \theta + R_{Ay} + R_{By} = 0 \quad (2)$$

$$R_{Az} + R_{Bz} = 0 \quad (3)$$

$$R_{Az} \cdot \ell_A - R_{Bz} \cdot \ell_B = 0 \quad (4)$$

$$-R_{Ay} \cdot \ell_A + R_{By} \cdot \ell_B + \frac{mr^2}{4} \omega_1 \cos \theta (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta) = 0 \quad (5)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1) a (5), acima, obtêm-se as reações nos mancais  $A$  e  $B$  :

$$R_{Bx} = -mg \cos \theta$$

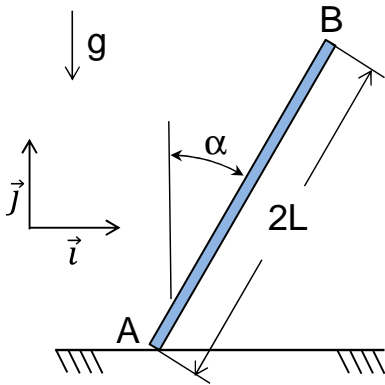
$$R_{Ay} = 4m \cos \theta \frac{g \ell_B + r^2 \omega_1 (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta)}{4(\ell_A + \ell_B)}$$

$$R_{By} = 4m \cos \theta \frac{g \ell_A - r^2 \omega_1 (\omega_2 - \omega_1 \sin \theta)}{4(\ell_A + \ell_B)}$$

$$R_{Az} = 0$$

$$R_{Bz} = 0$$

**Resposta (e-3):**  $\frac{1}{2}$  ponto

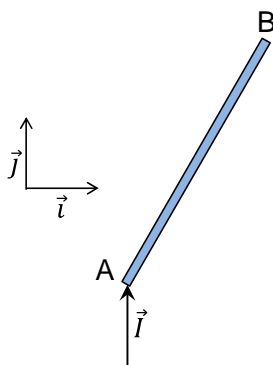


**Resolução da questão 2** (3,5 pontos) Uma barra homogênea  $AB$  de massa  $m$  e comprimento  $2L$ , inclinada de um ângulo  $\alpha$  em relação à vertical, cai em movimento de translação e atinge o solo com velocidade vertical  $V$ . O choque é anelástico e não há atrito entre a barra e o solo. Pedem-se, **para o instante imediatamente posterior ao impacto**, usando a base indicada na figura:

- a) a velocidade do baricentro da barra;
- b) a velocidade angular da barra;
- c) a força de contato em  $A$ ;
- d) o valor mínimo da velocidade  $V$  para o qual a barra perde o contato com o solo em  $A$ .

### Resolução

a) O choque é anelástico então a velocidade de  $A$  imediatamente após o choque é horizontal:  $\vec{v}'_A = v'_A \vec{i}$



$$\text{TRI: } \vec{l} = m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G)$$

mas, como não há atrito em  $A$ ,  $\vec{l} = l\vec{j}$  e como  $\vec{v}_G = -V\vec{j}$ , então:

$$\vec{v}'_G = v_G \vec{j}$$

$$\text{TMI: } \vec{K}'_A = \vec{K}_A$$

$$\vec{K}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A = mL(\text{sen}\alpha \vec{i} + \text{cos}\alpha \vec{j}) \wedge (-V\vec{j}) = -mL \text{sen}\alpha V \vec{k}$$

$$\vec{K}'_A = m(G - A) \wedge \vec{v}'_A + J_{Az} \omega' \vec{k} = mL(\text{sen}\alpha \vec{i} + \text{cos}\alpha \vec{j}) \wedge v'_A \vec{i} + \frac{1}{3} (2L)^2 m \omega' \vec{k} =$$

$$= -mL \text{cos}\alpha v'_A \vec{k} + \frac{4}{3} mL^2 \omega'$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha V = \text{cos}\alpha v'_A - \frac{4}{3} L \omega' \quad (1)$$

$$\text{Poisson: } \vec{v}'_G = \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \wedge (G - A)$$

$$\Rightarrow v'_G \vec{j} = v'_A \vec{i} + \omega' \vec{k} \wedge L(\text{sen}\alpha \vec{i} + \text{cos}\alpha \vec{j})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_A = \omega' L \text{cos}\alpha \\ v'_G = \omega' L \text{sen}\alpha \end{cases} \quad (2)$$

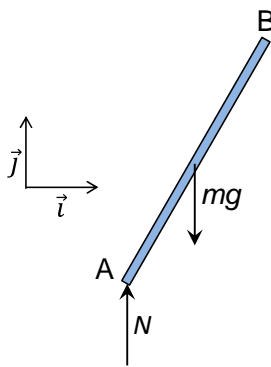
Usando (2) em (1) = (3)

$$\omega' = -\frac{3 \text{sen}\alpha V}{L(1 + 3 \text{sen}^2 \alpha)}$$

$$\Rightarrow v'_G = -\frac{3 \text{sen}^2 \alpha V}{1 + 3 \text{sen}^2 \alpha}$$



b) Após o impacto



$$\text{TMB: } (N - mg)\vec{j} = m\vec{a}'_G \Rightarrow \vec{a}'_G = a'_G\vec{j}$$

$$\Rightarrow N = m(g + a'_G) \quad (4)$$

$$\text{TMA polo G: } \vec{M}_G^{\text{ext}} = J_{Gz}\dot{\omega}'\vec{k}$$

$$\Rightarrow -NL \text{sen}\alpha = \frac{1}{12} m(2L)^2 \dot{\omega}'$$

$$\Rightarrow -N \text{sen}\alpha = \frac{1}{3} mL\dot{\omega}' \quad (5)$$

$$\text{Poisson: } \vec{a}'_G = \vec{a}'_A + \dot{\omega}' \wedge (\vec{G} - \vec{A}) + \ddot{\omega}' \wedge [\dot{\omega}' \wedge (\vec{G} - \vec{A})]$$

Se A estiver em contato com o solo, então  $\vec{a}'_A = a'_A\vec{i}$

$$\Rightarrow a'_G\vec{j} = a'_A\vec{i} + \dot{\omega}'\vec{k} \wedge L(\text{sen}\alpha\vec{i} + \text{cos}\alpha\vec{j}) + \dot{\omega}'\vec{k} \wedge [\dot{\omega}'\vec{k} \wedge (\text{sen}\alpha\vec{i} + \text{cos}\alpha\vec{j})]$$

$$\Rightarrow a'_G\vec{j} = a'_A\vec{i} + \dot{\omega}'L(\text{sen}\alpha\vec{j} - \text{cos}\alpha\vec{i}) - \dot{\omega}'^2L(\text{sen}\alpha\vec{i} + \text{cos}\alpha\vec{j})$$

$$\Rightarrow a'_G = \dot{\omega}'L \text{sen}\alpha - \dot{\omega}'^2L \text{cos}\alpha \quad (6)$$

Usando (3), (5) e (6) em (4) vem:

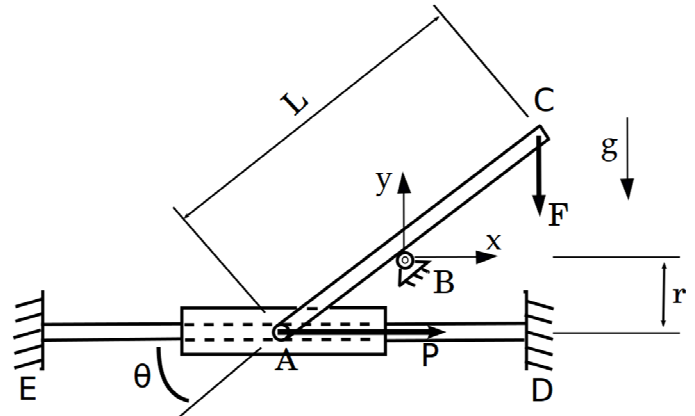
$$N = \frac{m}{1+3\text{sen}^2\alpha} \left( g - \frac{9 \text{cos}\alpha \text{sen}\alpha^2 V^2}{L(1+3\text{sen}^2\alpha^2)} \right) \quad (7)$$

c) A barra perderá se  $N \leq 0$  (significando que a hipótese que  $\vec{a}'_A = a'_A\vec{i}$  feita no item anterior não é válida). Assim, igualando (7) a 0, obtém-se o valor limite:

$$V^2 = \frac{gL(1+3\text{sen}^2\alpha)^2}{9 \text{cos}\alpha \text{sen}^2\alpha} \Rightarrow V = \left( \frac{gL(1+3\text{sen}^2\alpha)^2}{9 \text{cos}\alpha \text{sen}^2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$



**Resolução da questão 3** (3,0 pontos) Sobre a guia  $ED$  horizontal pode deslizar uma luva conforme mostra a figura. A barra delgada  $AC$  é articulada na luva através do vínculo ideal  $A$  e não perde o contato com o rolete  $B$ . No ponto  $C$  é aplicada uma força  $F$  vertical. Despreze as massas da barra, da luva e todas as forças de atrito. Utilizando o PTV determine, em função de  $F$  e dos parâmetros  $L$ ,  $r$  e  $\theta$ , a força  $P$  indicada na figura, a ser aplicada em  $A$ , para que o sistema se mantenha em equilíbrio na configuração mostrada.



Utilizando-se o sistema de coordenadas  $Bxyz$  dado,

$$(A - B) = \vec{r}_A = x_A \vec{i} - r \vec{j} \quad (C - B) = \vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j}$$

Da figura,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{r}{x_A} \implies x_A = -r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ x_C &= L \cos \theta - x_A = \cos \theta \left[ L - \frac{r}{\sin \theta} \right] \\ y_C &= L \sin \theta - r \end{aligned} \quad (0,5)$$

Deslocamentos virtuais:

$$\vec{r}_A = -r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \vec{i} - r \vec{j} \implies \delta \vec{r}_A = -r \left[ \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] \delta \theta \vec{i} \quad (0,5)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_C &= \cos \theta \left[ L - \frac{r}{\sin \theta} \right] \vec{i} + (L \sin \theta - r) \vec{j} \\ \delta \vec{r}_C &= \left( -L \sin \theta - r \left[ \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] \right) \delta \theta \vec{i} + L \cos \theta \delta \theta \vec{j} \end{aligned} \quad (0,5)$$

PTV:

$$\delta \tau_{\vec{P}} + \delta \tau_{\vec{F}} = 0 \implies \quad (0,5)$$

$$P \vec{i} \cdot \delta \vec{r}_A - F \vec{j} \cdot \delta \vec{r}_C = 0 \implies \quad (0,5)$$

$$\left( P \frac{r}{\sin^2 \theta} - FL \cos \theta \right) \delta \theta = 0 \implies P = \frac{FL \cos \theta \sin^2 \theta}{r} \quad (0,5)$$