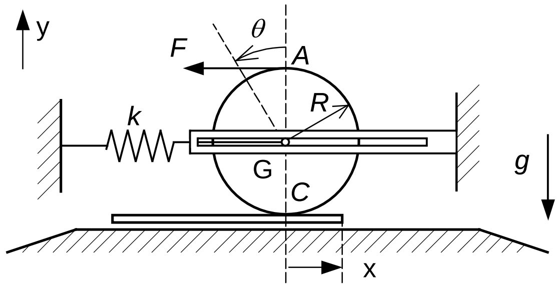
**PME 2200 – MECÂNICA B – Prova Substitutiva – 25 de julho de 2013.**
**Duração: 100 minutos**

**Resolução da 1ª Questão**

**Questão 1 (3,5 pontos).** Parte do sistema de movimentação do papel de uma máquina copiadora é composto por um cilindro acionado por uma correia. O cilindro homogêneo, de centro *G*, raio *R* e massa *M*, pode girar em torno de seu eixo, ligado elasticamente à base da máquina por uma mola linear, conforme mostra a figura. O eixo pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal. A folha de papel de massa *m* é arrastada pelo cilindro por adesão eletrostática, sem que haja escorregamento relativo. Despreza-se o atrito entre a folha de papel e o plano horizontal a ela inferior. A mola, de rigidez *k*, opera na horizontal e está indeformada na posição: $x = 0$ e $\theta = 0$. A correia que produz a força horizontal *F(t)* pode ser representada por um fio ideal enrolado na parte externa do cilindro, de momento de inércia $J_{Gz} = MR^2/2$. Considerando as coordenadas generalizadas *x*, da folha, e $\theta$, do cilindro, pedem-se:




a) a velocidade do centro do cilindro (escrita em termos das coordenadas generalizadas);
b) a energia cinética do conjunto;
c) a energia potencial e as forças generalizadas não conservativas associadas a $F(t)$;
d) as equações de movimento utilizando a formulação *Lagrangeana*;
e) a aceleração da folha de papel devida à força *F(t)*, expressa em função de *x* e $\theta$.

*Resolução:*

a) Sendo *x* a coordenada que mede a posição da folha e $v_G$ a velocidade do baricentro G do cilindro e como não há escorregamento entre a folha e o cilindro, tal que $x_G = x - R\theta$, resulta:

$$\boxed{v_G = \dot{x} - R\dot{\theta}} \qquad (0,5)$$

b) A energia cinética do conjunto é: $T = T_{Folha} + T_{Cilindro}$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M v_G^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - MR\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - MR\dot{x}\dot{\theta} + \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2} \qquad (1,0)$$

c) A energia potencial pode ser escrita:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k x_G^2 = \frac{1}{2}k\left(x - R\theta\right)^2} \qquad (0,5)$$

Por outro lado, as forças generalizadas não conservativas são determinadas:

$$\delta W = -F\delta A \text{ ; com } \delta A = \delta x - 2R\delta\theta; \quad \delta W = -F\delta A \rightarrow \delta W = Q_x^{nc}\,\delta x + Q_\theta^{nc}\,\delta\theta \rightarrow$$

$$\boxed{Q_x^{nc} = -F; \text{ e } Q_\theta^{nc} = 2RF} \qquad (0,5)$$

d) As equações de *Lagrange* nas coordenadas $x = q_1$ $e$ $\theta = q_2$ ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^{nc};$$

Levam às equaçõesde movimento nas coordenadas generalizadas $x$ e $\theta$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left((M+m)\dot{x} - MR\dot{\theta}\right) = (M+m)\ddot{x} - MR\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = k(x - R\theta)$$

$$\boxed{(M+m)\ddot{x} + kx - kR\theta - MR\ddot{\theta} = -F}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta} - MR\dot{x}\right) = \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} - MR\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -kR(x - R\theta)$$

$$\boxed{\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + kR^2\theta - kRx - MR\ddot{x} = 2RF}$$ (0,5)

Note que o sistema de equações diferenciais lineares acima pode ser escrito na forma matricial:

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \\ \text{com} \\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M+m & -MR \\ -MR & \frac{3}{2}MR^2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -kR \\ -kR & kR^2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}; \ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -F(t) \\ 2RF(t) \end{bmatrix}\end{array}}$$

e) Por substituição da aceleração angular na equação de movimento na coordenada $x$:

$$\ddot{\theta} = \frac{4F}{3MR} - \frac{2}{3}\frac{(kR^2\theta - kRx - MR\ddot{x})}{MR^2} \Rightarrow$$

segue:

$$(M+m)\ddot{x} + kx - kR\theta - \left(\frac{4F}{3} - \frac{2}{3}(kR\theta - kx - M\ddot{x})\right) = -F$$

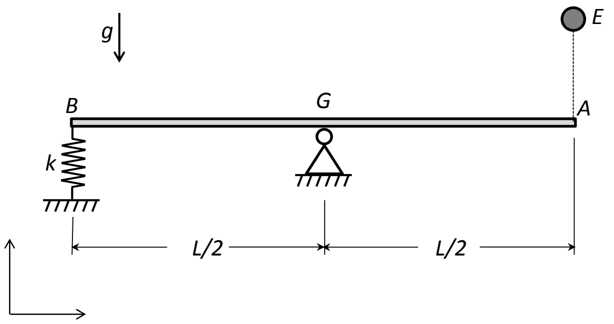
$$(\frac{1}{3}M + m)\ddot{x} + \frac{1}{3}kx - \frac{1}{3}kR\theta = \frac{1}{3}F$$

$$(M+3m)\ddot{x} + kx - kR\theta = F$$

Finalmente:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{F(t) - k(x - R\theta)}{(M+3m)}}$$ (0,5)

**Resolução da 2ª Questão (3,5 pontos)**



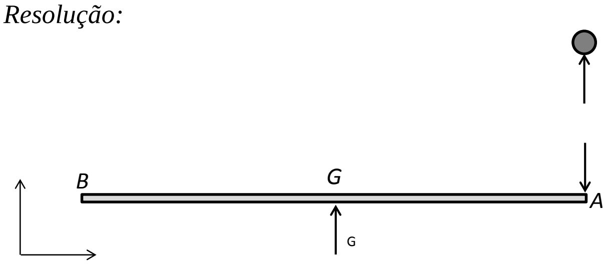

A esfera $E$ de massa $m/12$ e dimensões desprezíveis atinge a barra de massa $m$ e comprimento $L$, com velocidade vertical $v_0$ dada, no ponto $A$.Dado o coeficiente de restituição $e$, pedem-se:

a) O impulso $\vec{I}$ recebido pela esfera durante a colisão;

b) A velocidade da esfera $\vec{v}_E\,'$ imediatamente após a colisão;

c) A velocidade angular $\omega'$ da barra imediatamente após a colisão;

*Resolução:*




- TRI para a esfera: $\vec{L}+\vec{I}=\vec{L}' \Rightarrow -\dfrac{m}{12}v_0+I=\dfrac{m}{12}v'_E \Rightarrow \boxed{I=\dfrac{m}{12}\left(v'_E+v_0\right)}$ (1) (0,5)

- TMI para a barra, pólo $G$: $\vec{K}_G+(A-G)\wedge\vec{I}_A=\vec{K}'_G \Rightarrow \vec{0}+\dfrac{L}{2}\vec{i}\wedge\left(-I\,\vec{j}\right)=J_G\omega'\vec{k} \Rightarrow$

$$-\frac{L}{2}I=\frac{1}{12}mL^2\omega' \Rightarrow \boxed{\omega'=-\frac{6I}{mL}}\ (2) \qquad (0{,}5)$$

- Poisson: $\vec{v}'_A=\vec{\omega}'\wedge(A-G)\Rightarrow v'_A\vec{j}=\omega'\vec{k}\wedge\dfrac{L}{2}\vec{i}\Rightarrow \boxed{v'_A=\dfrac{\omega' L}{2}}$ (3) (0,5)

- Choque: $v'_A-v'_E=-e\left(v_A-v_E\right)\Rightarrow \boxed{v'_A-v'_E=-ev_0}$ (4) (0,5)

- Solução do sistema:

(2) em (3) $\Rightarrow \boxed{v'_A=-\dfrac{3I}{m}}$ (5)

(5) em (4) $\Rightarrow \boxed{v'_E=-\dfrac{3I}{m}+ev_0}$ (6)

(6) em (1) $\Rightarrow I=\dfrac{m}{15}(1+e)v_0 \Rightarrow \boxed{\vec{I}=\dfrac{m}{15}(1+e)v_0\,\vec{j}}$ (7) (0,5)

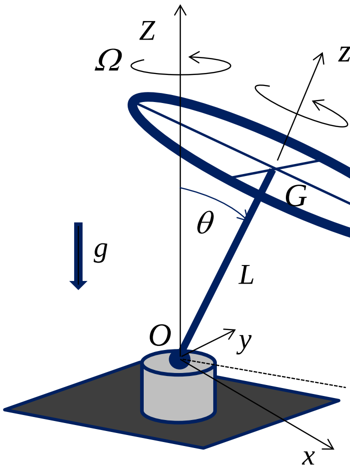
(7) em (6) $\Rightarrow v'_E=\dfrac{4e-1}{5}v_0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}'_E=\dfrac{4e-1}{5}v_0\,\vec{j}}$ (0,5)

(7) em (2) $\Rightarrow \boxed{\omega'=-\dfrac{2}{5}(1+e)\dfrac{v_0}{L}}$ (0,5)

**Resolução da 3ª Questão (3,0 pontos)**

O anel homogêneo (de espessura desprezível), de massa $m$ e raio $R$ gira ao redor da barra $OG$, de massa desprezível e comprimento $L$, com velocidade angular a ela relativa (i.e., de rotação própria) constante, $\omega$. Sabe-se que este rotor está em movimento de precessão estacionária com ângulo $\theta$ e taxa de precessão $\Omega$, ambos constantes e considerados conhecidos. O sistema $Oxyz$ acompanha a barra $OG$, com $Oy$ sempre horizontal. Os eixos $Ox$, $Oy$, $Oz$ e $OZ$ são orientados respectivamente pelos versores, $\vec i, \vec j, \vec k$ e $\vec K$. Nesta situação de equilíbrio dinâmico, determine:

a) a velocidade angular de rotação própria, $\omega$;
b) a força de reação aplicada ao sistema, pela rótula $O$.




*Resolução:*

a)

$$\vec\omega_{abs} = \vec\omega_{arr} + \vec\omega_{rel} = \Omega\vec K + \omega\vec k \text{ ; mas } \vec K = \cos\theta\,\vec k - \text{sen}\,\theta\,\vec i \text{ , logo,}$$

$$\boxed{\vec\omega_{abs} = (\omega + \Omega\cos\theta)\vec k - \Omega\,\text{sen}\,\theta\vec i} \qquad (0{,}5)$$

Da condição de precessão estacionária $(\dot\phi = \Omega = \text{cte};\ \dot\psi = \omega = \text{cte};\ \dot\theta \equiv 0)$ pode-se deduzir, pelo TMA, $\dot{\vec H}_O = \vec M_O^{ext}$, com $O$ fixo, ou com o uso do formalismo de Lagrange, que:

$$\boxed{\left(J\omega + (J - I)\Omega\cos\theta\right)\Omega = mgz_G = mgL}, \qquad (1{,}0)$$

de onde:

$$\boxed{\omega = \frac{mgL}{J\Omega} + (\frac{I}{J} - 1)\Omega\cos\theta}; \quad \text{com } J = mR^2 \text{ e } I = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right). \text{ Ou seja:}$$

$$\boxed{\omega = \frac{gL}{\Omega R^2} + \left(\frac{L^2}{R^2} - \frac{1}{2}\right)\Omega\cos\theta} \qquad (0{,}5)$$

b)

Neste caso de precessão estacionária ( $\vec\omega_{arr} = \Omega\vec K = \text{cte}$ ), tem-se: $\vec a_G = \vec\omega_{arr} \wedge \left(\vec\omega_{arr} \wedge (G - O)\right)$, de forma que: $\vec a_G = \Omega\vec K \wedge \left(\Omega\vec K \wedge L\vec k\right) = \Omega\vec K \wedge \left(\Omega L\text{sen}\,\theta\vec j\right) = \Omega^2 L\text{sen}\theta(\vec K \wedge \vec j)$, i.e.,

$$\boxed{\vec a_G = -\Omega^2 L\text{sen}\theta\left(\cos\theta\vec i + \text{sen}\,\theta\vec k\right)} \qquad (0{,}5)$$

Do TMB seguem as reações, $X\vec i + Y\vec j + Z\vec k$, aplicadas pela articulação ao sistema. De fato:

$$m\vec a_G = X\vec i + Y\vec j + Z\vec k - mg\vec K \text{ , ou seja } - m\Omega^2 L\text{sen}\theta\left(\cos\theta\vec i + \text{sen}\,\theta\vec k\right) = X\vec i + Y\vec j + Z\vec k - mg(-sen\theta\vec i + \cos\theta\vec k)$$

E portanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} X = -mg\left(\text{sen}\,\theta + \dfrac{\Omega^2 L}{g}\text{sen}\,\theta\cos\theta\right) \\ Y = 0 \\ Z = mg\left(\cos\theta - \dfrac{\Omega^2 L}{g}\text{sen}^2\,\theta\right) \end{array}} \quad . \qquad (0{,}5)$$